heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

ReDS
heig-vd

VTF

Design de systèmes de traitement vidéo temps réel par FPGA

Introduction au traitement numérique du signal vidéo

Partie 2 - Filtrage

Michel Starkier

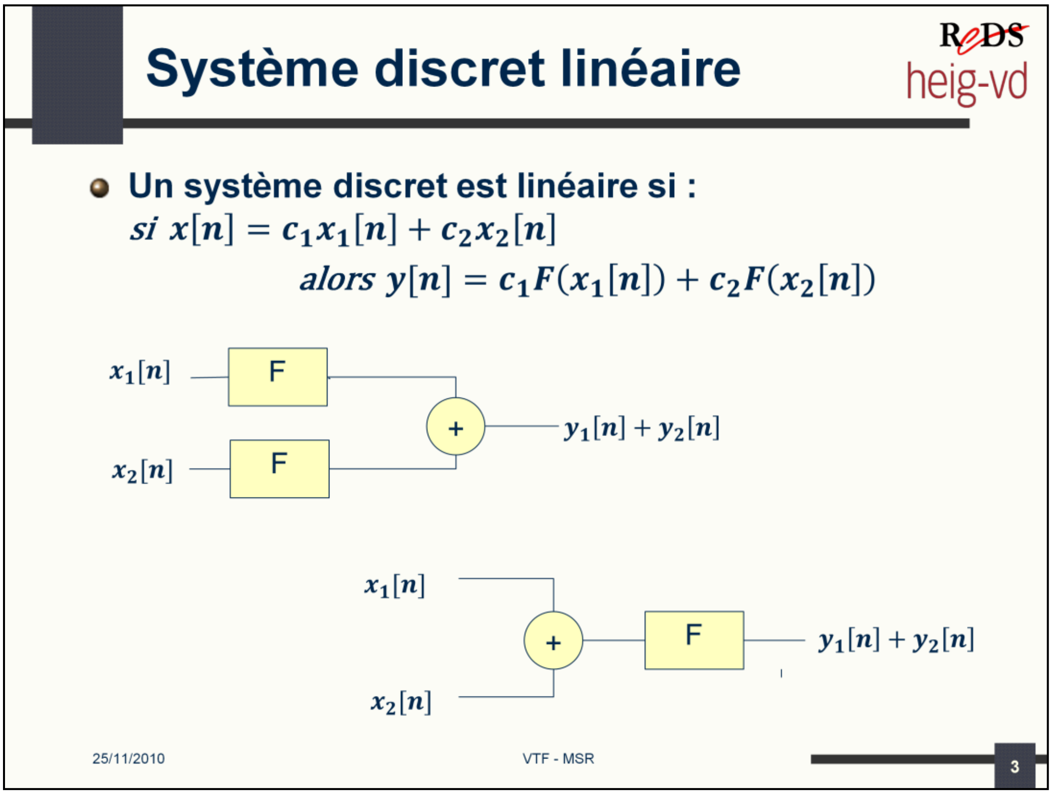
Systèmes discrets

RéDS heig-vd

$x[n] \longrightarrow$ Système discret $\longrightarrow y[n]$

$$y[n] = F(x[n])$$

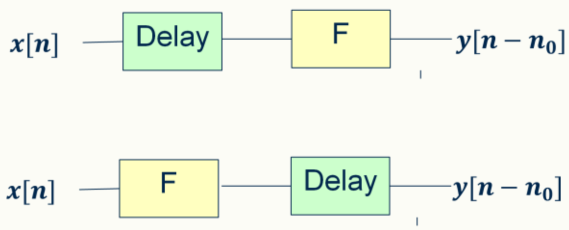
- **Un système discret reçoit en entrée une séquence de données et produit en sorties une séquence de données en fonction des données en entrée**
- **Système statique : L'échantillon en sortie ne dépend que d'un échantillon en entrée. Ex :** $y[n] = ax^2[n] + bx[n] + c$
- **Système dynamique : L'échantillon en sortie dépend de plusieurs échantillons en entrée. Ex :** $y[n] = ax[n] + bx[n-1]$



Exemple de système non-linéaire : $y[n] = (x[n])^2$

Invariance temporelle

- Un système est invariant si un décalage temporel sur l'entrée provoque le même décalage sur la sortie :
- $\boldsymbol{Si\ y[n] = F(x[n]) alors\ y[n-n_0] = F(x[n-n_0])}$



Amplitude, magnitude et puissance

- Pour un système discret
  - La magnitude est la valeur absolue de l'amplitude
  - La puissance est le carré de l'amplitude (ou de la magnitude)

- Rapport de puissances :

$$\mathbf{X_{dB}(m) = 10 \log_{10} \frac{|X(m)|^2}{|X(0)|^2} (dB)}$$

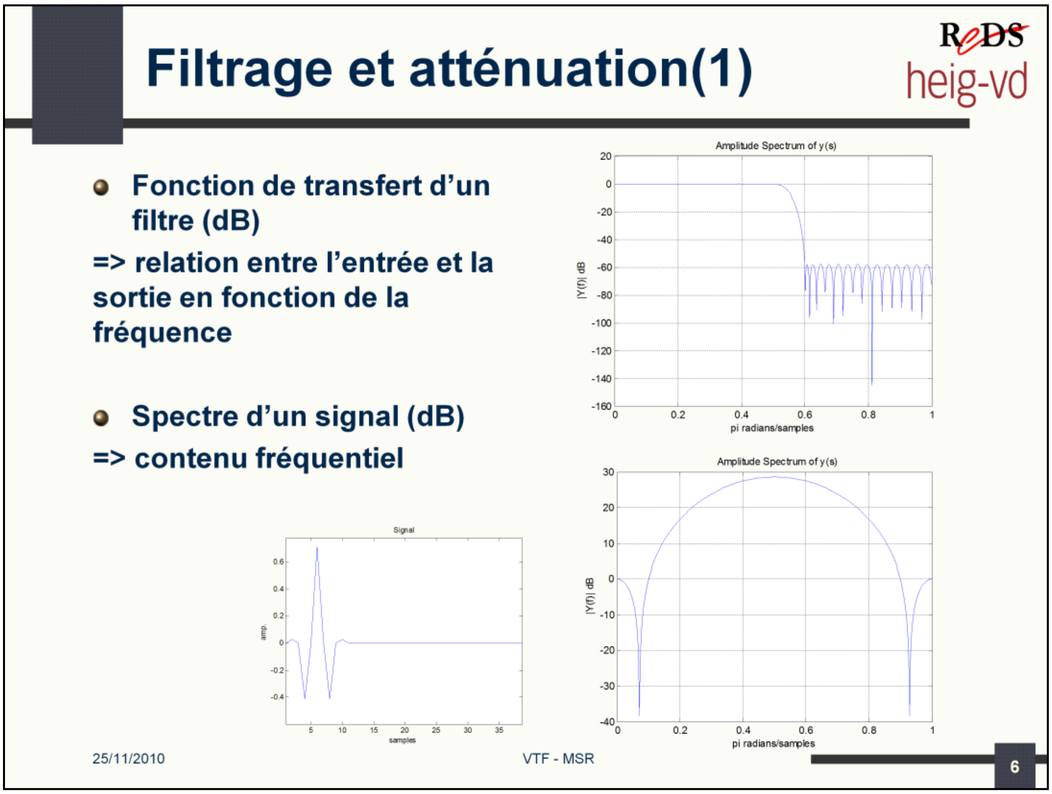
- Rapport de magnitude :

$$\mathbf{X_{dB}(m) = 20 \log_{10} \frac{|X(m)|}{|X(0)|} (dB)}$$

25/11/2010 VTF - MSR 5

Quelques valeurs importantes :

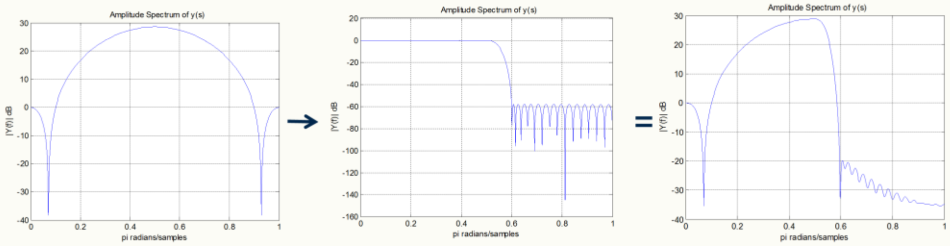
Rapport magnitude	**Decibels**
10	+20 dB
2	+6 dB
1	0 dB
1/2	- 6 dB
10^{-1}	-20 dB
10^{-2}	-40 dB
10^{-3}	-60 dB
10^{-4}	-80 dB
10^{-5}	-100 dB



Dans l'exemple ci-dessus, l'atténuation maximale du filtre (F=0.6) est -60dB, soit un rapport 1000 entre le niveau en entrée et le niveau en sortie du filtre.

Filtrage et atténuation(2)

RéDS heig-vd

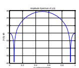
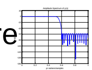


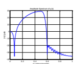
- **Le spectre du signal après filtrage est le produit de la réponse en fréquence et du spectre du signal avant filtrage**

$$Y(m) = H(m).X(m)$$

soit en dB $Y_{dB}(m) = H_{dB}(m) + X_{dB}(m)$

25/11/2010 VTF - MSR 7

Dans l'exemple ci-dessus le signal dont le spectre est  , est filtré par le filtre 

En analysant le spectre du signal après filtrage , nous constatons que les fréquences inférieures à 0.5 ne sont pas atténuées, alors que les fréquences après 0.6 subissent une atténuation de 60dB.

Notons que l'analyse spectrale (DFT) d'un signal ou d'un filtre numérique produit un signal discret, c'est à dire une suite de valeurs. Pour l'exemple ci dessus, la DFT (Discret Fourier Transform) a été effectuée sur 1024 points et le résultat a été réduit à une séquence de 1000 valeurs. Ainsi $Y(m) = H(m).X(m)$ doit être compris comme la multiplication d'un vecteur par un vecteur, c'est a dire :

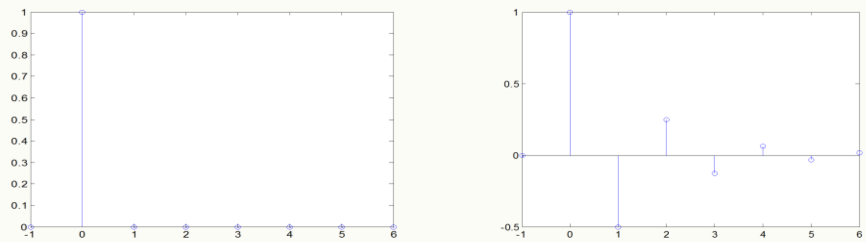
$Y(0) = H(0).X(0), Y(1) = H(1).X(1), \ldots \ldots ..$

Réponse impulsionnelle

- **Un système (discret) linéaire invariant peut être complétement caractérisé par sa réponse impulsionnelle**
- **On obtient la réponse impulsionnelle avec un signal en entrée décrit par :**

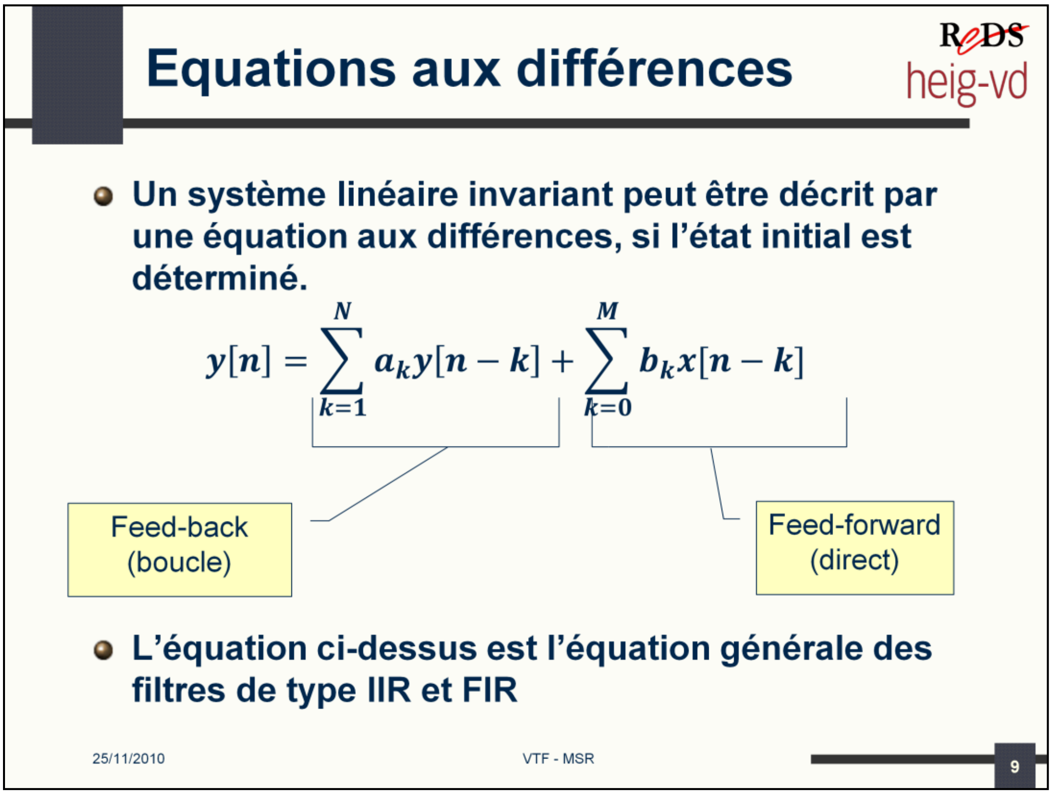
$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1 \end{cases}$$

- **Ex:** $y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$



On obtient la répons impulsionnelle d'un système en appliquant un signal constitué d'un seul échantillon de valeur non nulle et de tous les autre échantillons de valeur 0. L'impulsion doit être de valeur 1 pour obtenir la réponse impulsionnelle exacte, mais pour des raisons de précision la valeur de l'impulsion peut être différente.

Exemple : pour analyser un système traitant des entiers non signés 8 bits, un signal de valeur 1 ne donnera aucun résultat. Il faudra utiliser une impulsion de valeur 100 par exemple ou même 255.



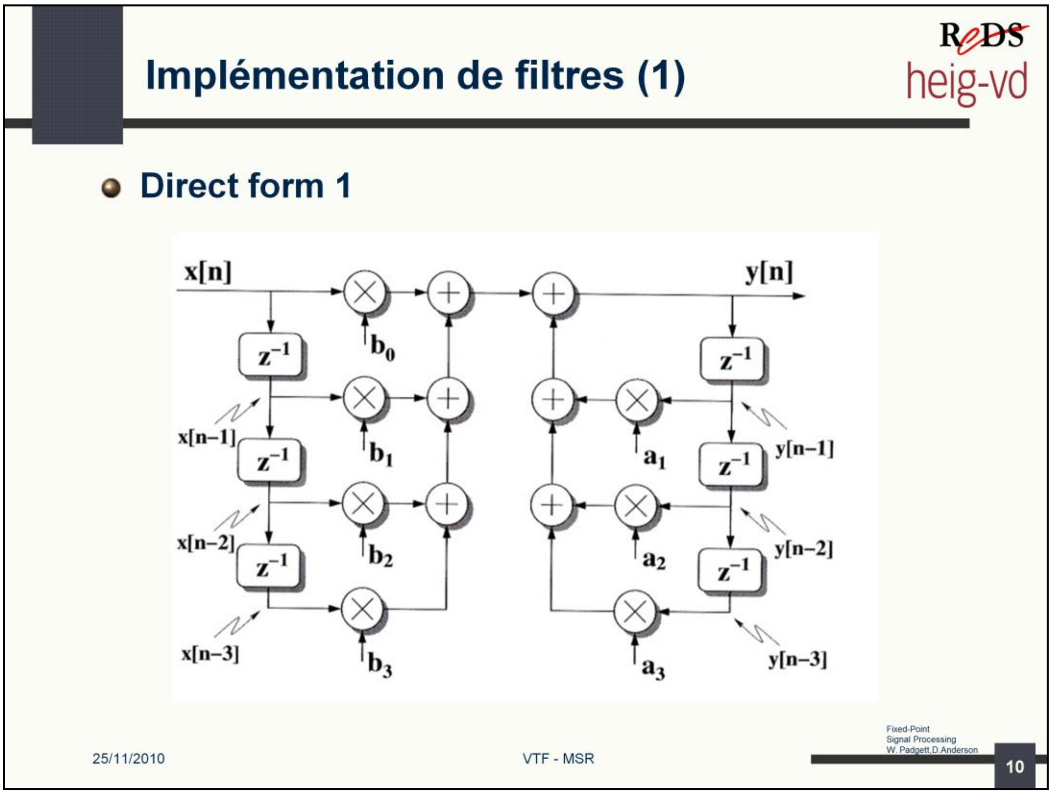
Une telle équation sous-entend que le système possède de la «mémoire», c'est à dire des registres avec une horloge (fréquence d'échantillonnage)permettant de stocker les valeurs des échantillons –en entrée et en sortie – précédant l'échantillon courant.

La partie Feed-forward (direct) est la somme de la valeurs des échantillons d'entrée $x[n]$, à divers instants (ou positions), multipliés par les coefficients b_k.

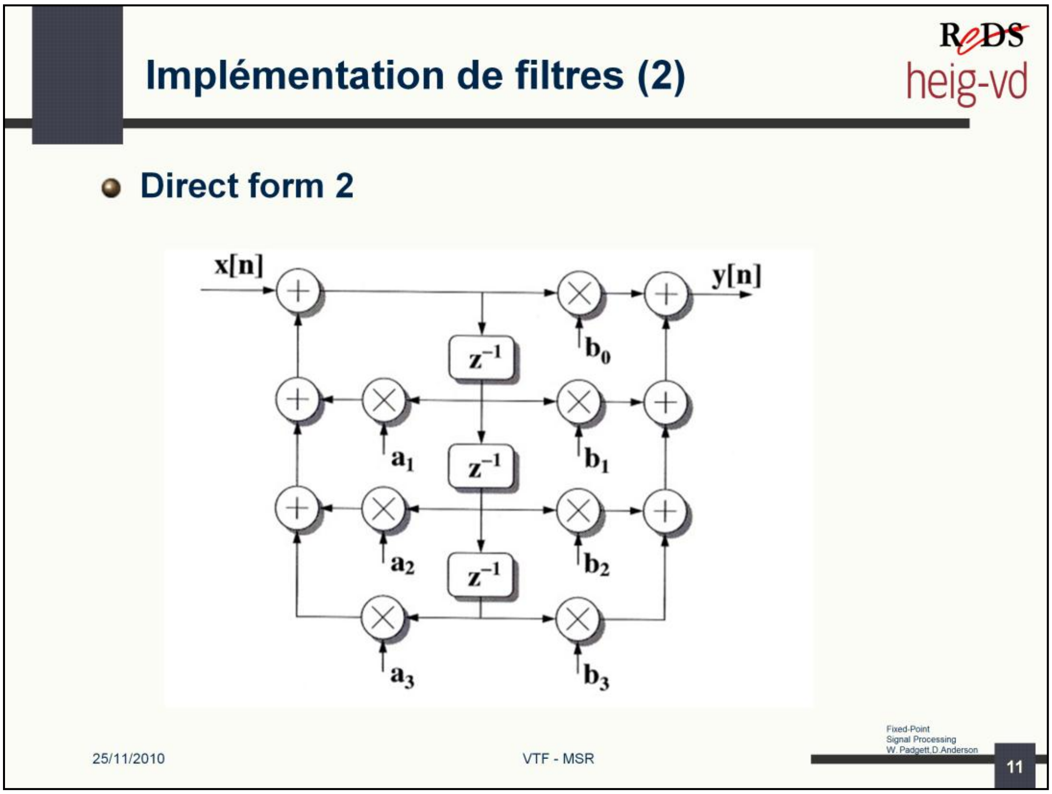
La partie Feed-back (boucle) est la somme de la valeurs des échantillons en sortie $y[n]$, à divers instants (ou positions), multipliés par les coefficients a_k.

Notez que dans la partie Feed-back de l'équation, k ne peut pas prendre la valeur 0, la boucle se fait au moins à travers d'un registre.

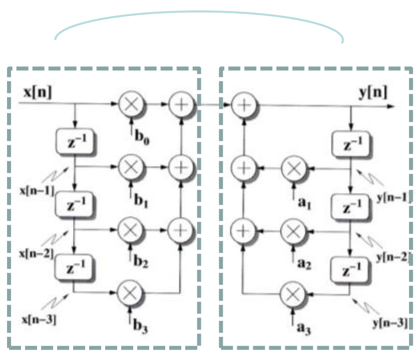
On ne peut pas avoir : $y[n] = a_0 y[n] + b_0[n]$



Nous voyons ci-dessus l'implémentation la plus classique d'un filtre décrit par l'équation aux différences. Ainsi l'échantillon $x[n-3]$ est l'échantillon entrant le plus « ancien » multiplié par b_3 . Notez que $y[n]$ n'est pas multiplié par un coefficient (pas de coefficient a_0).



Cette implémentation, plus compacte s'obtient en inversant la partie directe et la partie boucle et en supprimant une série de registre.



Deux types de filtres: IIR et FIR

- **Filtre IIR (Infinite Impulse Response) – nommé aussi filtrage récursif:**

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- **Filtre FIR (Finite Impulse response) non récursif , pas de partie bouclée (coefficients $a_k = 0$) :**

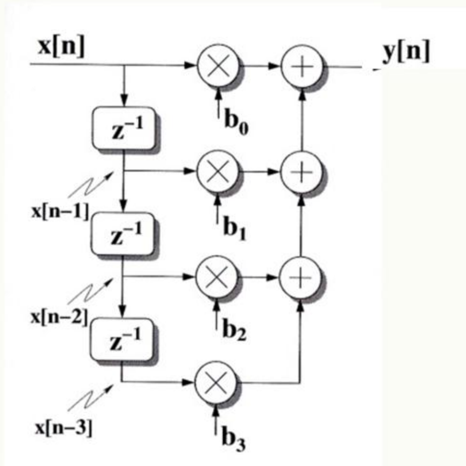
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

25/11/2010 VTF - MSR 12

Les filtres FIR sont plus facile à implémenter que les filtre IIR, mais sont moins efficaces, c’est à dire demandent plus de ressources. Les filtres FIR sont majoritairement utilisés pour le filtrage vidéo.

Implémentation d'un FIR

RéDS heig-vd



Fixed-Point Signal Processing W. Padgett,D.Anderson

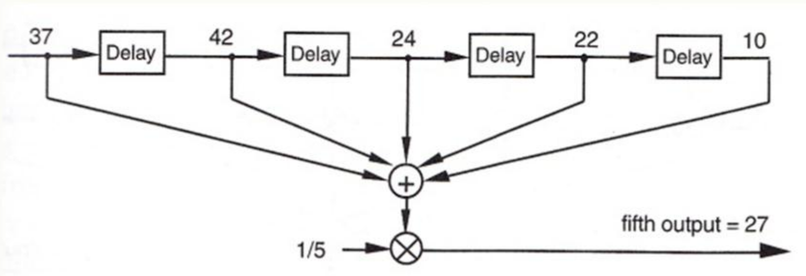
Un filtre FIR ne contient pas de partie bouclée (récursive) . Comme son nom l'indique la réponse impulsionnelle a une taille finie et bien déterminée correspondant au nombre de coefficients utilisés.

Exemple de FIR : le moyenneur

RеDS heig-vd

$$y[n] = \frac{1}{5}(x[n-4] + x[n-3] + x[n-2] + x[n-1] + x[n])$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=n-4}^{n} x[k] = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{5} x[n-k]$$



$x[n-4] = 10, x[n-3] = 22, x[n-2] = 24, x[n-1] = 42, x[n] = 37$

si le filtre est initialisé à 0, la sortie aura comme valeurs successives :

2, 6.4, 11.2,19.6, 27

Introduction à la convolution

RеDS heig-vd

- **L'équation générale d'un FIR à M coefficients peut être exprimée de la façon suivante :**

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

- $h[k]$ **est une séquence de M nombres (coefficients).**
- **La réponse impulsionnelle du filtre est une séquence identique à** $h[k]$

25/11/2010 VTF - MSR 15

En appliquant une impulsion (1) à l'entrée du filtre, nous obtenons une séquence de k échantillons dont les valeurs sont égales aux coefficients.

Exemple : filtre passe-bas à 5 coefficients

REDS heig-vd

- **Equation :**

  $y[n] = \sum_{k=0}^{4} h[k]x[n-k]$

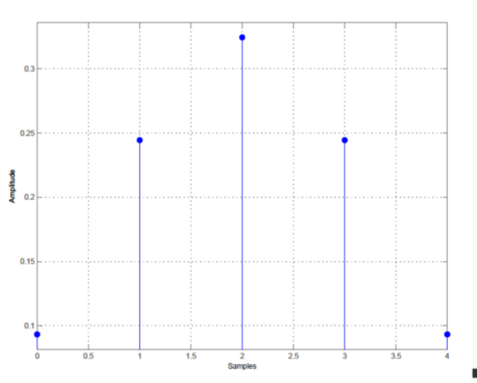
$h[0] = 0.09, h[1] = 0.24, h[2] = 0.32, h[3] = 0.24, h[4] = 0.09$

donc,

$$y[n] = 0.09x[n-4] + 0.24x[n-3] - 0.32x[n-2] + 0.24x[n-1] + 0.09x[n]$$

- **Réponse impulsionnelle**

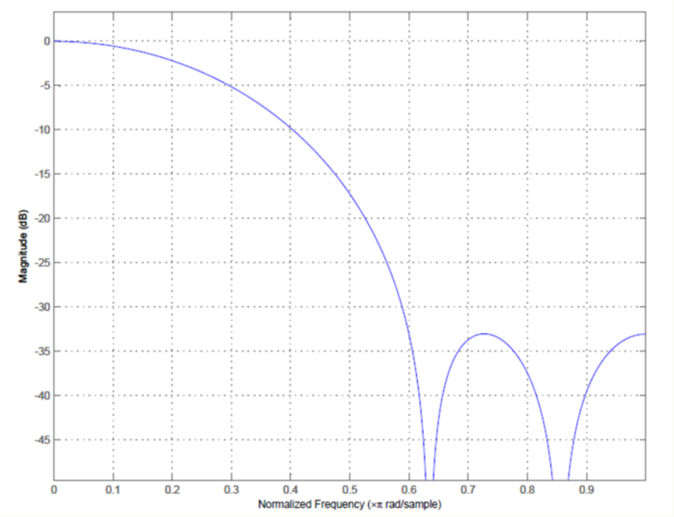
0.093357758508931216
0.2444137848898868
0.32435931349784031
0.2444137848898868
0.093357758508931216



Exemple : filtre à 5 coefficients

RDS
heig-vd

Réponse en fréquence



Convolution

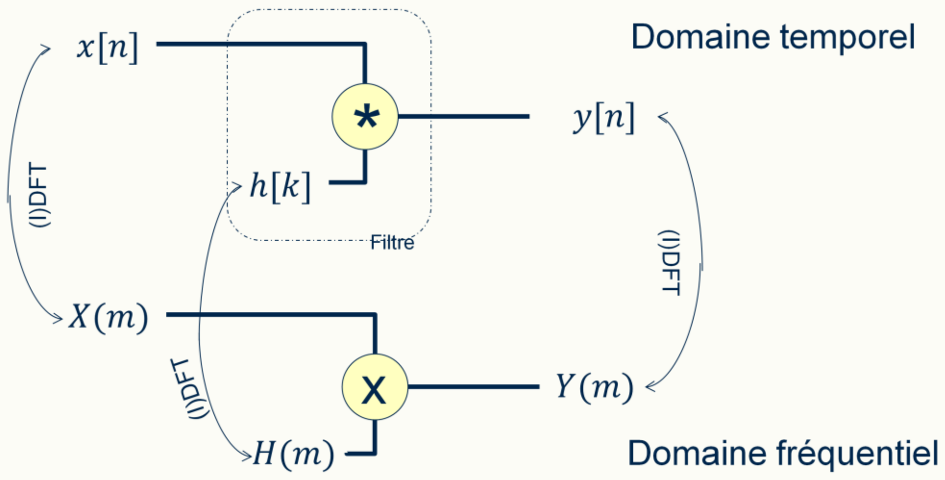
RéDS heig-vd

- L'équation $y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$ peut être exprimée plus simplement par une équation de convolution : $y[n] = h[k] * x[n]$

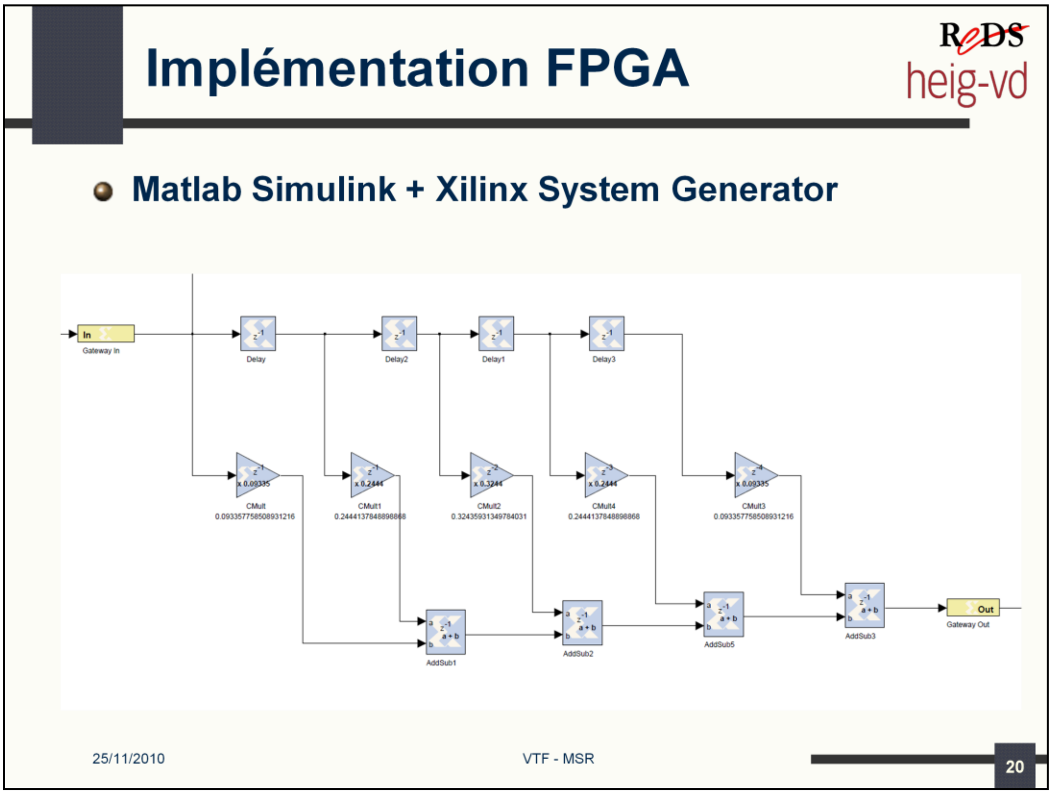
- Un convolution de deux séquences dans le domaine temporel est équivalente à la multiplication de leurs transformées dans le domaine fréquentiel:

$$y[n] = h[k] * x[n] \xrightarrow{DFT} \mathrm{Y}(\mathrm{m}) = H(m).X(m)$$

Convolution



- **Passage du domaine temporel au domaine fréquentiel (DFT) et vice versa (IDFT)**



Pour plus d’information sur Xilinx System Generator, voir la documentation System Generator for DSP User Guide