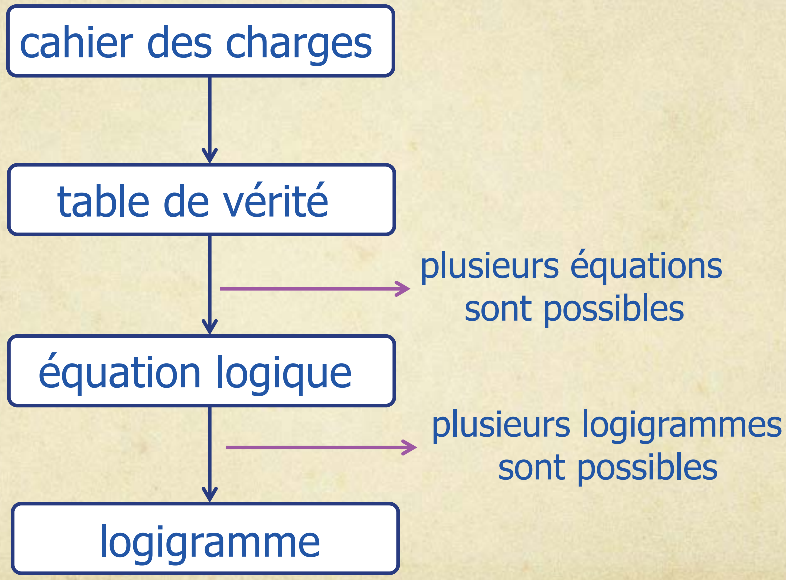
heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

Synthèse des systèmes combinatoires

Profs. Peña & Perez-Uribe & Mosqueron

Basé sur le cours du Prof. E. Sanchez

Synthèse des systèmes logiques combinatoires



- L'équation canonique découle directement de la table de vérité. Mais il peut exister des solutions équivalentes qui comportent moins de monômes: des équations simplifiées
- Exemple: la fonction OU

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

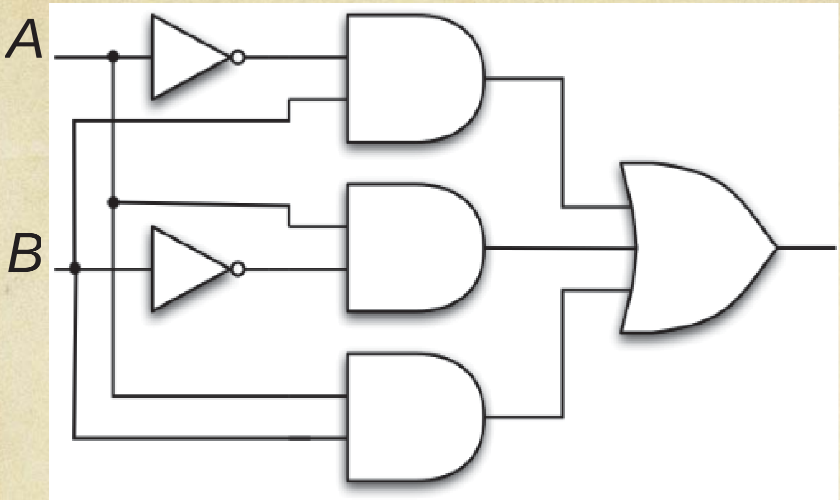
solution canonique:

$$Z(A,B) = \overline{A}B + A\overline{B} + AB$$

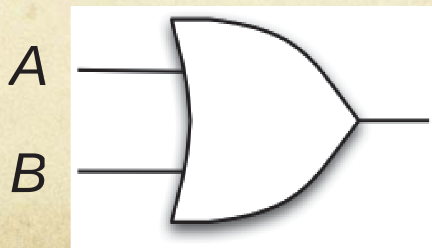
solution simplifiée:

$$Z(A,B) = A + B$$

- Méthodes de simplification
  - algébrique
  - graphique (table de Karnaugh)

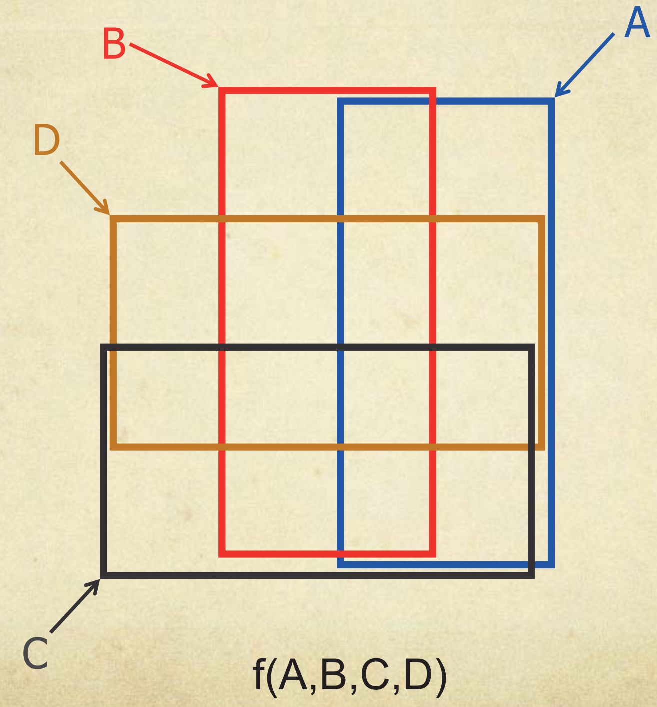


$$\overline{A}B + A\overline{B} + AB$$



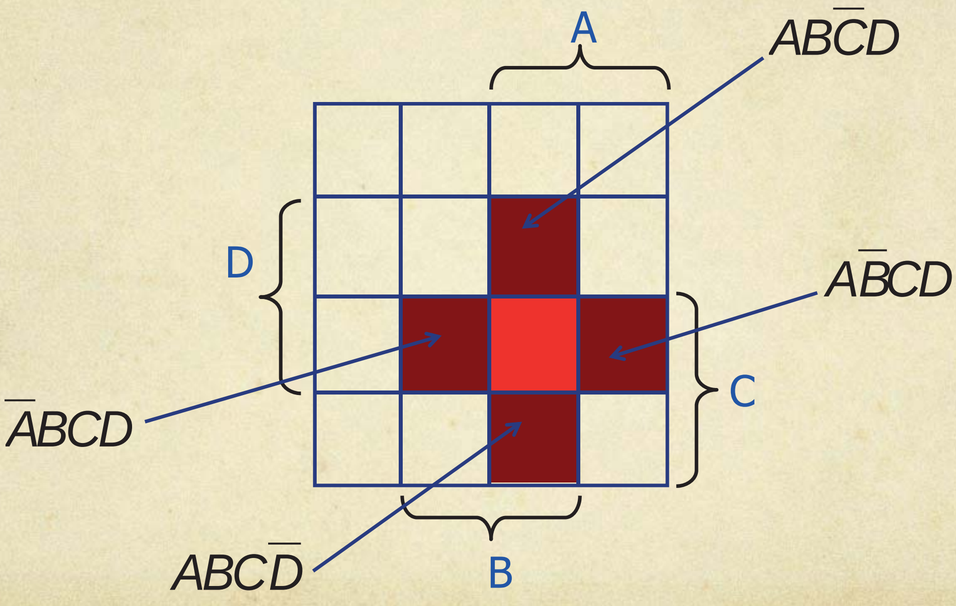
$$A + B$$

La table de Karnaugh

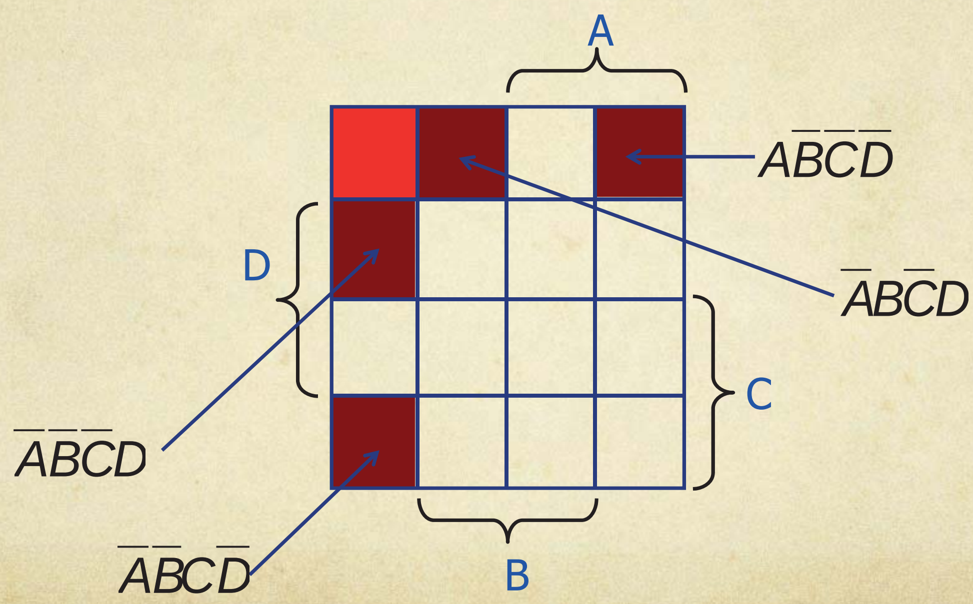


- Une table de Karnaugh est similaire à une table de vérité: les valeurs des sorties sont spécifiées pour toutes les combinaisons des entrées
- Dans la table de vérité, chaque combinaison des entrées correspond à une ligne; dans la table de Karnaugh chaque combinaison des entrées correspond à une case. Le nombre de cases de la table de Karnaugh d'une fonction à n variables est donc égal à 2^n
- Les cases de la table de Karnaugh sont arrangées de telle façon qu'une seule variable change entre deux cases contiguës
- Toute case d'une table de Karnaugh à n variables est contiguë à n autres cases

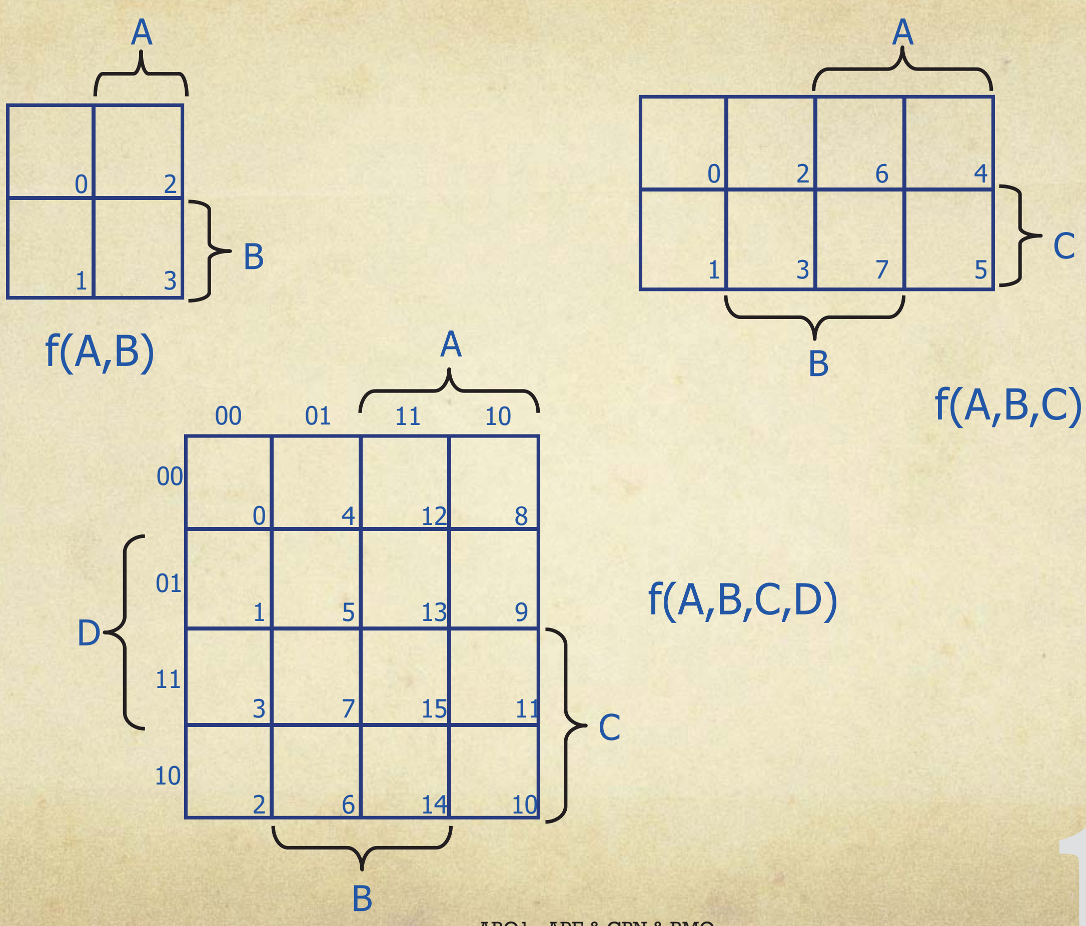
- Exemple: voici les 4 cases contiguës pour la combinaison des entrées ABCD

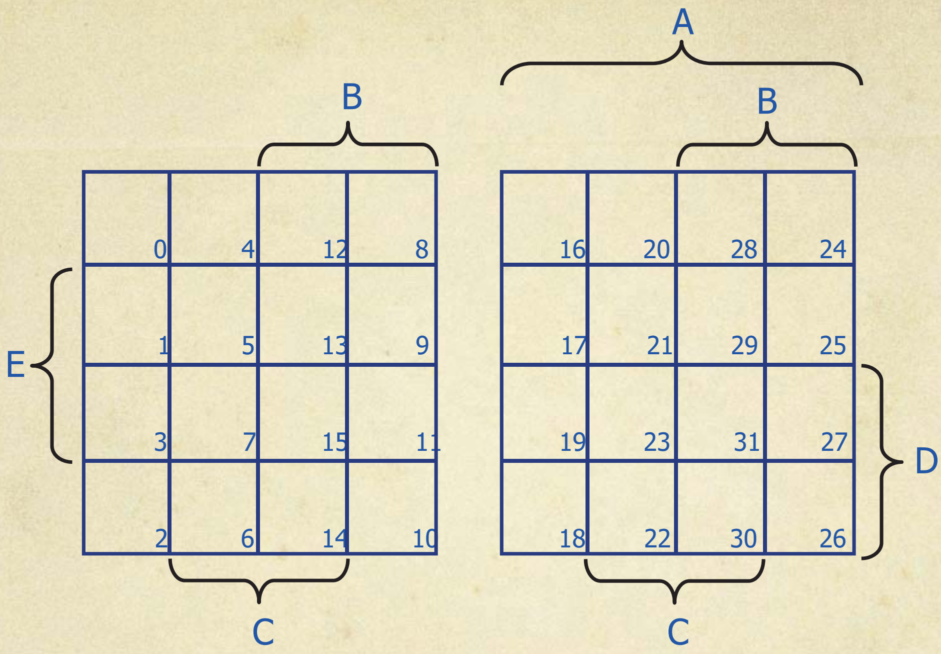


- Exemple: voici les 4 cases contiguës pour la combinaison des entrées A’B’C’D' (l'apostrophe indique l'inversion d'une variable, remplaçant ainsi la barre par dessus la variable)

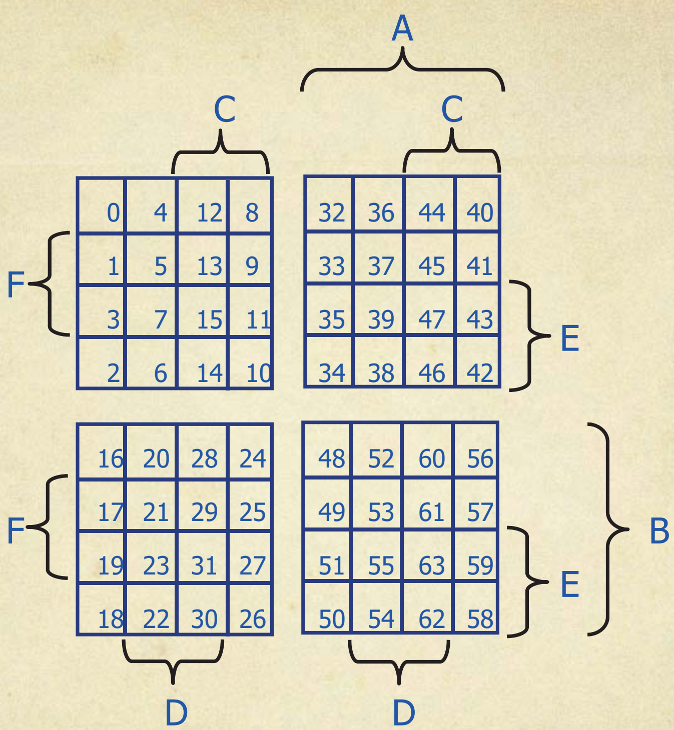


- Il est possible de faire des tables de Karnaugh jusqu'à 6 variables
- **Pour respecter la règle de la contigüité, il faut respecter l'emplacement des variables**
- **Les numéros des cases des tables de Karnaugh des figures suivantes supposent également un certain ordonnancement des variables: la variable de poids fort correspond à la moitié gauche de la table, etc**
- La case numéro 13 d'une fonction à 4 variables, par exemple, correspond à la combinaison des entrées 1101. Pour exprimer algébriquement cette combinaison, il faut connaître les noms des variables et leur ordonnancement. Si les variables sont A,B,C,D, on pourrait avoir ABC'D, DCB'A, etc





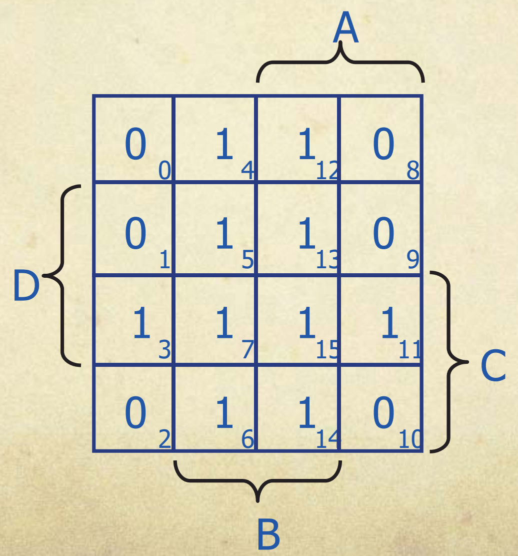
f(A,B,C,D,E)



f(A,B,C,D,E,F)

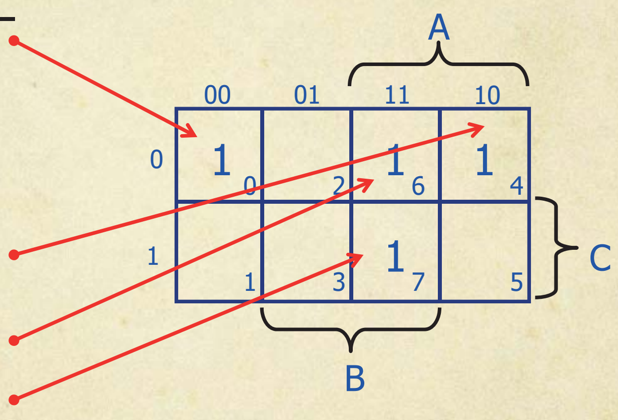
Représentation d'une fonction

- Une fonction est représentée à l'aide d'une table de Karnaugh en mettant la valeur de la fonction à l'intérieur de chaque case
- Exemple: $Z(A,B,C,D) = \sum(3,4,5,6,7,11,12,13,14,15)$



- Exemple à partir d'une table de vérité:

A	B	C	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1



f(A,B,C)

Simplification d'une fonction

- La table de Karnaugh permet l'obtention de l'équation minimale d'une fonction logique, sous la forme d'une somme de produits
- En effet, tout produit logique correspond à un ensemble de cases contiguës dont le nombre est **une puissance de 2**
- La somme de produits minimale d'une fonction correspond donc à l'ensemble minimal de groupes de cases de la table de Karnaugh où la fonction est égal à 1. Le nombre de cases de chaque groupe doit être une puissance de 2

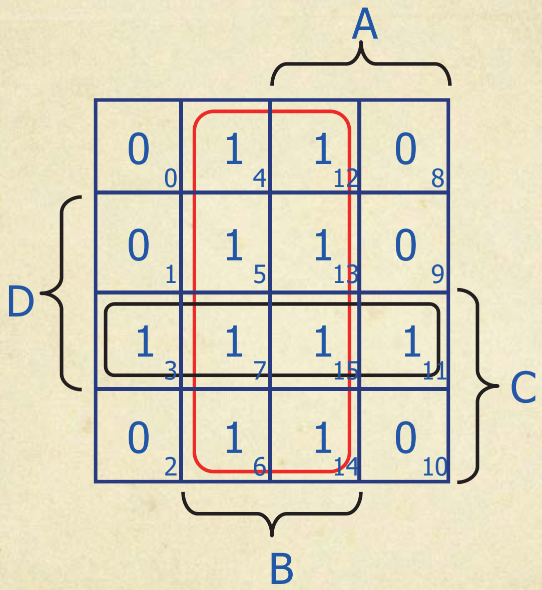
Simplification d'une fonction

- Un groupe de deux '1' adjacents (ayant une frontière commune non réduite à un point) s'exprime sous la forme d'un produit comportant N-1 variables
- Par analogie :
  - le groupement de deux groupes adjacents de deux '1' s'exprime sous la forme d'un produit comportant N-2 variables, etc...

BA \ DC	00	01	11	10
00				
01	1	1		
11	1	1		
10				

- groupe de quatre '1'
  → produit de N-2 variables
  (4-2=2)

- Exemple:
  Z(A,B,C,D) = ∑(3,4,5,6,7,11,12,13,14,15)



Z(A,B,C,D) = B + CD

- Impliquant d’une fonction:
  produit des variables de la fonction.
  Chaque impliquant est représenté dans la table de Karnaugh par un groupe de cases contiguës, en un nombre égal à une puissance de deux

- Impliquant premier:
  impliquant qui n'est pas inclus dans un autre impliquant plus grand. La solution minimale d'une fonction est formée seulement d'impliquants premiers. Mais tous les impliquants premiers ne font nécessairement pas partie de la solution minimale

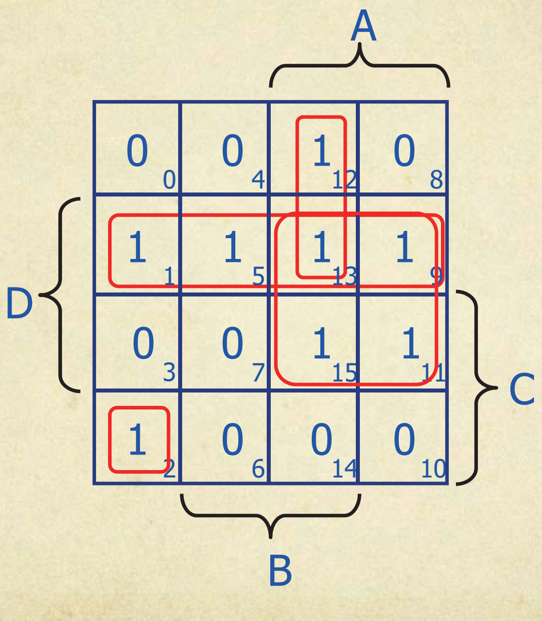
- Impliquant premier essentiel:
  impliquant premier qui contient au moins un minterme qui n'est pas inclus dans un autre impliquant premier. Un impliquant premier essentiel fait toujours partie de la solution minimale

Méthode de minimisation

- Dresser la liste de tous les impliquants premiers de la fonction
- Dresser la liste de tous les impliquants premiers essentiels
- Tous les impliquants premiers essentiels font partie de la solution minimale
- Couvrir les mintermes restants avec un nombre minimal d'impliquants premiers

- Exemple:

f(A,B,C,D)=AB'CD+A'BC'D+ABC'D'+ABC'D+A'B'C'D+AB'C'D+A'B'CD'+ABCD

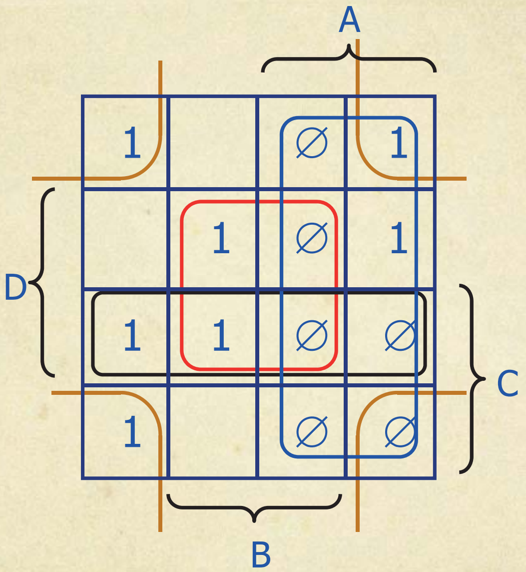


f(A,B,C,D)=C'D+AD+ABC'+A'B'CD'

Fonctions incomplètement définies

- Une fonction est incomplètement définie si la valeur de l'état de sortie n'est pas définie pour les 2^n états d'entrée possibles
- L'état d'entrée où la sortie n'est pas définie est un état ∅ ou condition indifférente (en anglais, "*don't happen*" ou "*don't care*")
- Pour un état ∅ la sortie peut prendre la valeur 0 ou 1: plusieurs solutions existent donc pour une même fonction, selon les valeurs choisies pour les états ∅
- La méthode de minimisation d'une fonction par la table de Karnaugh s'applique également aux fonctions incomplètement définies: tous les états ∅ sont mis à 1 et l'on cherche la solution minimale pour cette borne supérieure de la fonction; bien entendu, les impliquants composés seulement d'états ∅ sont éliminés

- Exemple:
  $f(A,B,C,D) = \sum(0,2,3,5,7,8,9) + \sum\varnothing(10,11,12,13,14,15)$



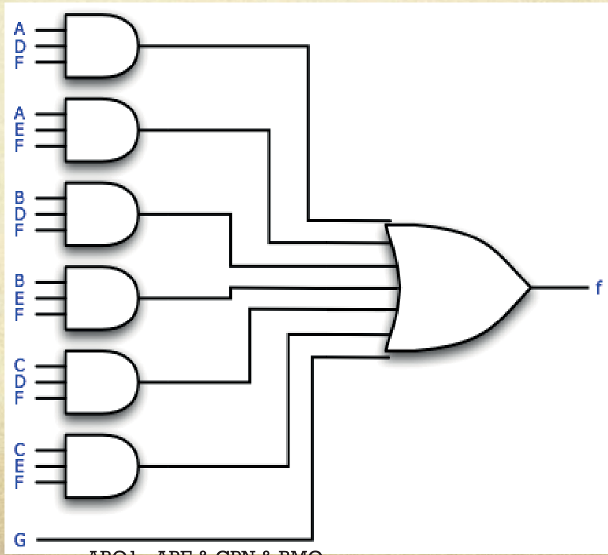
$f(A,B,C,D) = A + BD + \overline{B}\,\overline{D} + CD$

Logique multiniveaux

- Exemple:

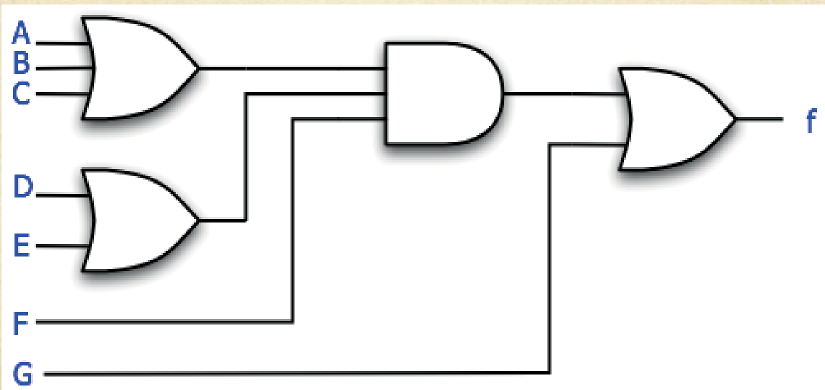
  f(A,B,C,D,E,F,G)=ADF+AEF+BDF+BEF+CDF+CEF+G

- Solution minimale à deux niveaux:



Solution minimale multiniveaux:

$$
\begin{aligned}
f &= (AD+AE+BD+BE+CD+CE)F + G \\
&= ((A+B+C)D+(A+B+C)E)F + G \\
&= (A+B+C)(D+E)F + G
\end{aligned}
$$



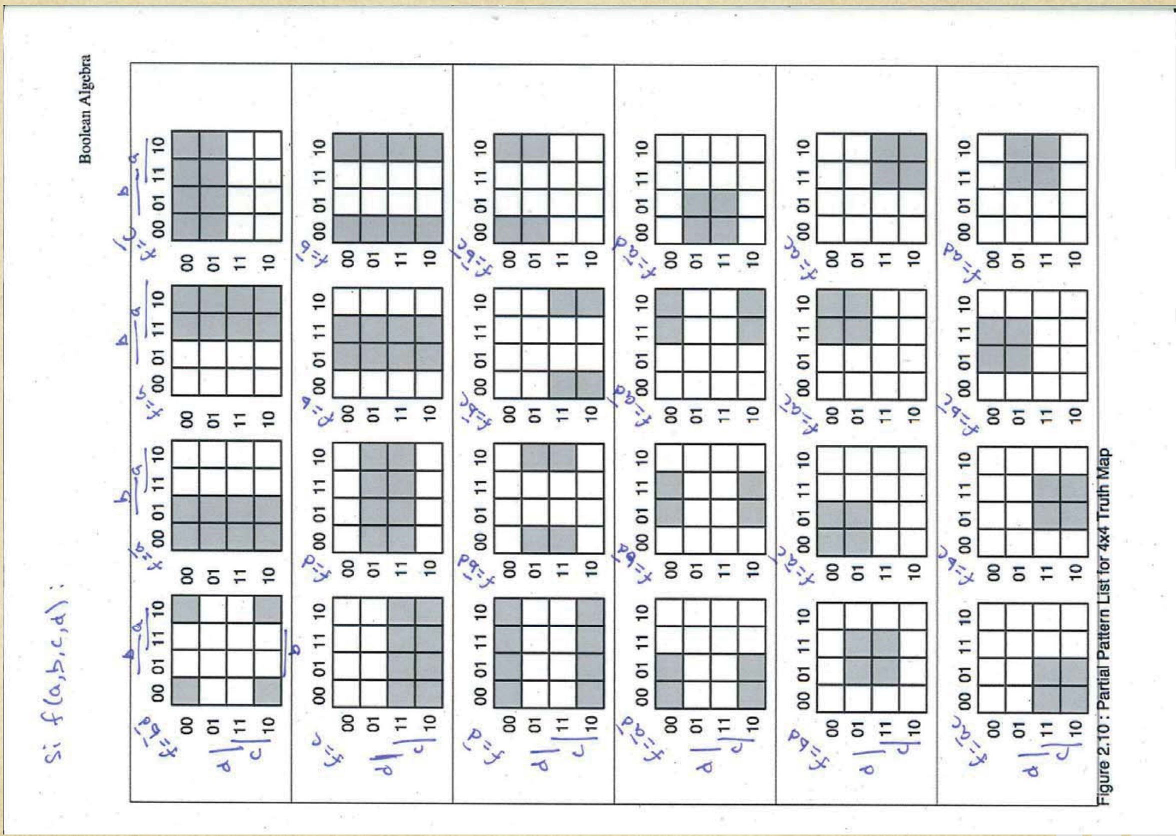


Figure 2.10 : Partial Pattern List for 4x4 Truth Map

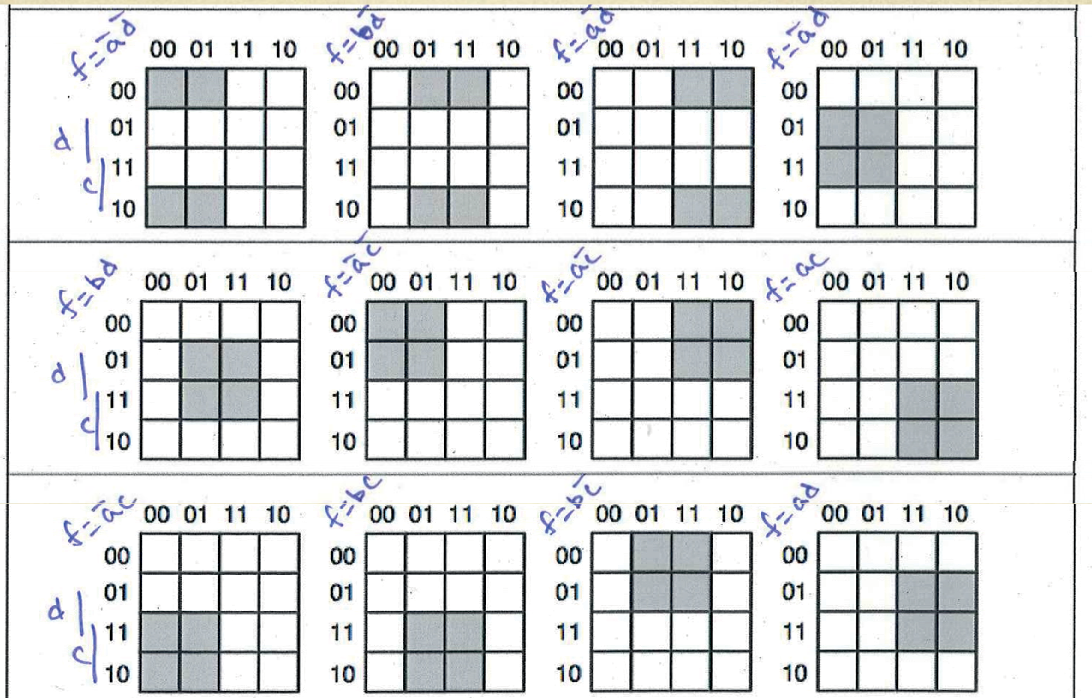


Figure 2.10 : Partial Pattern List for 4x4 Truth Map