heig-vd
Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion
du Canton de Vaud

ARO-1

Représentation de l'information

Profs. Peña & Perez-Uribe & Mosqueron
Basé sur le cours du Prof. E. Sanchez

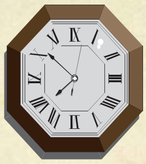
8 août 2017

Polycopié : Electronique numérique

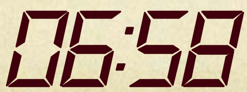
- Introduction: pages 1 à 4
- Systèmes de numération et codes: pages 5 à 20

Représentations de l'information

- Analogique:
  Les valeurs ne sont pas séparées par des sauts: entre deux valeurs A et B il existe un nombre infini d'autres valeurs



- Digitale (numérique):
  Une valeur est représentée par une chaîne finie de symboles appelés digits.
  Il est impossible de représenter numériquement tous les nombres existants entre deux points d'une échelle analogique



Numérique vs digital

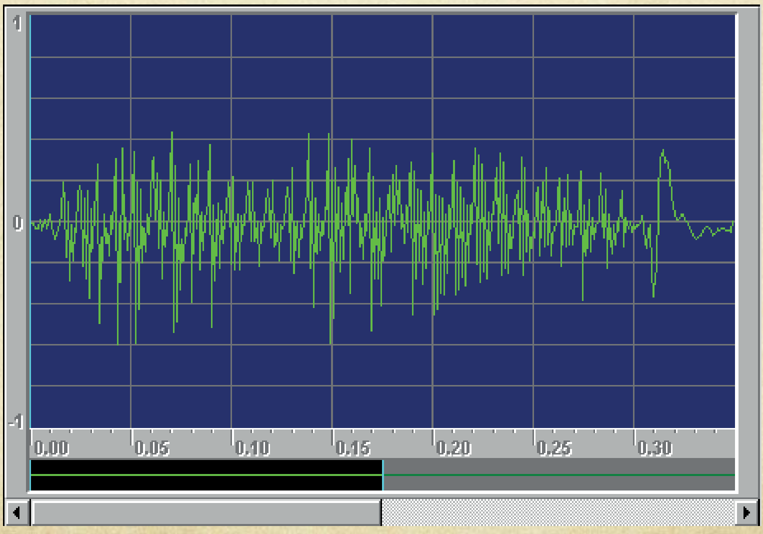
- Digital signifie « qui appartient aux doigts, se rapporte aux doigts ». Il vient du latin digitalis, « qui a l'épaisseur d'un doigt », lui-même dérivé de digitus, « doigt ». C'est parce que l'on comptait sur ses doigts que de ce nom latin a aussi été tiré, en anglais, digit, « chiffre », et digital, « qui utilise des nombres ».

- Numérique, du latin numerus, signifie représentation par nombres. Ainsi, on oppose le calcul numérique au calcul algébrique reposant sur des variables. En informatique, on a d'abord utilisé ce terme pour qualifier le fonctionnement binaire (des 1 et des 0) des premiers ordinateurs.

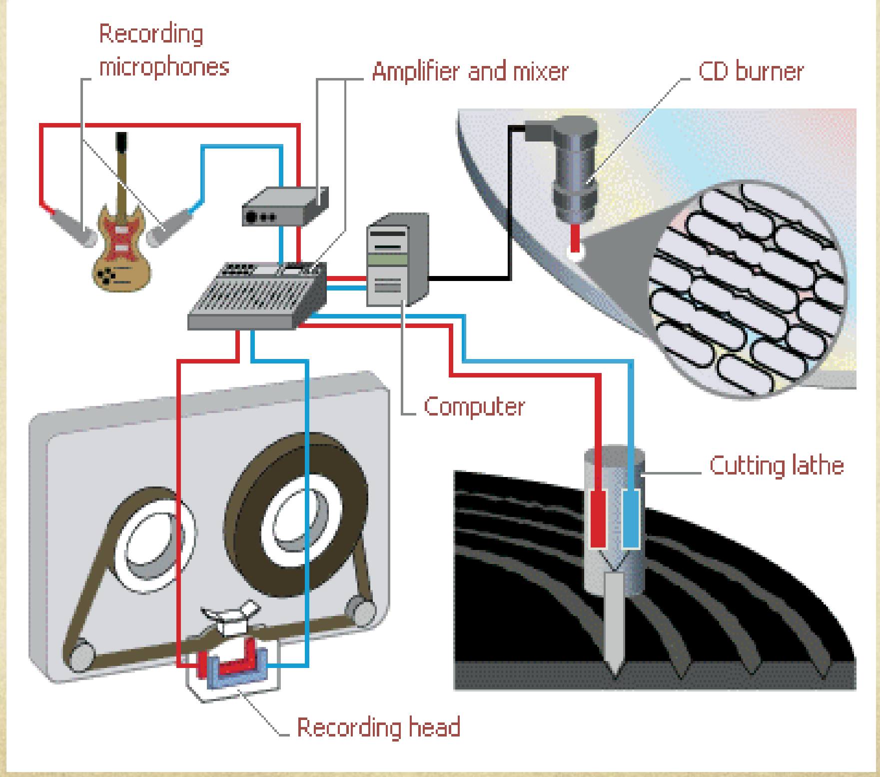
- Le numérique renvoie plutôt à la technologie, celle qui est manipulée par les ingénieurs, tandis que le digital touche aux pratiques des utilisateurs.
  - Electronique numérique, photographie numérique, son numérique, vidéo numérique…
  - Si vous parlez d'un site web ou d'une application mobile: expérience digitale, de dispositif digital, ou encore d'innovation digitale

Analogique et Numérique

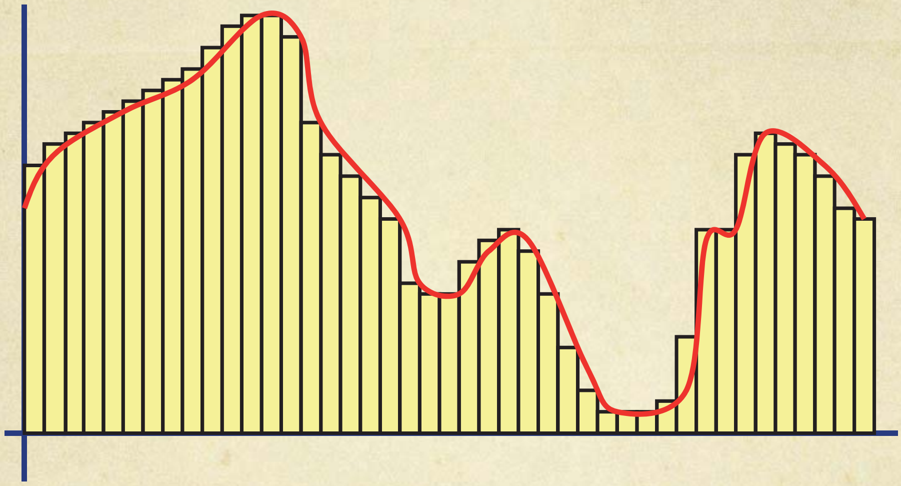
- Exemple: enregistrement analogique et numérique du son



Analogique et Numérique

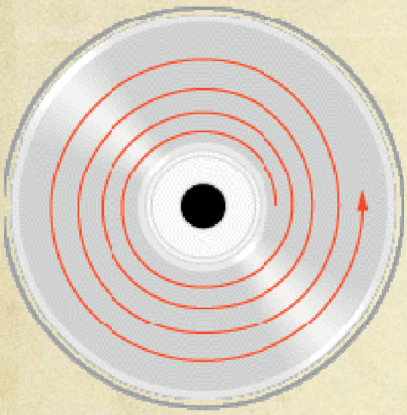


Analogique et Numérique



Pour enregistrer sur un CD, le son est échantillonné 44'100 fois par seconde. La valeur de chaque échantillon est stockée en binaire, à l'aide de 16 digits (*bits*): il n'y a **que** 65'536 valeurs possibles (2^{16})

Le disque compact



Les informations sur un CD standard sont codées sur une piste d'alvéoles en spirale. Par exemple, dans le cas d'un CD de 74min, la spirale mesure 5.38kms de longueur. Les données sont lues à une vitesse linéaire constante de ~1.2m/s.

Si le temps maximal d'enregistrement sur un CD est de 74 minutes, le nombre maximal de bits stockés dans un CD est donc de:

(44100 échantillons/sec)*(16 bits)*(2 canaux)*(74*60 sec)=

6'265'728'000 bits = 783'216'000 *bytes*

(1 byte = 8 bits)

Contenu et information

- Toute information dans un système informatique est représentée sous la forme d'un paquet de bits
- La différence entre un type d'information et un autre est donnée seulement par le contexte: la même séquence de bits peut représenter un nombre entier, un nombre réel, un caractère, une instruction, un son, etc

$$\boxed{\text{information = bits + contexte}}$$

Système de numération romain

Représentation des nombres naturels

- Le système de numération romain a été heureusement remplacé par un système de numération de position dans une base choisie => Couramment la base 10
- Exemple:
  - IV + XII = XVI => très difficile d'établir des règles

MCMLIII = 1953

$$1953 = 1\times10^3 + 9\times10^2 + 5\times10^1 + 3\times10^0$$
$$1953 = 1\times1000 + 9\times100 + 5\times10 + 3\times1$$
$$1953 = 1000 + 900 + 50 + 3$$

M = 1000, D = 500, C = 100, L = 50, X = 10, V = 5, I = 1

Systèmes de numération "Historique"

- Le premier système décimal est né en Chine vers l'an -2000
- La numération de position avec un zéro (çunya qui était un point à l'origine) est apparut dans un traité de cosmologie qui s'intitule "les parties de l'univers" écrit en sanscrit en 458
  - Traduit en arabe, çunya devient sifr qui, traduit en italien, donna zéfiro. Et de zéfiro à zéro ☺

Systèmes de numération "Historique"

- En 825:
  Les algorithmes de calcul et l'équation ont étés dévoilés à Bagdad par "Al-Khawarizmi" dans son livre "livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul (système de numération) des Indiens".
- Le mot "Algorithme" vient du nom de ce mathématicien
- L'écriture des nombres de droites (poids faible) à gauche (poids fort) nous vient des arabes
  - On parle fréquemment de chiffres arabes

Système de numération de position

- Système de numération :
  - liste ordonnée de symboles appelés chiffres
  - règles définissant leur utilisation pour créer des nombres
  - règles définissant un jeu d'opérations telles que l'addition, la multiplication, etc.,
    appelé arithmétique.
- Le nombre de symboles différents est appelé base.

Numération de position

- Le nombre de symboles différents étant très inférieur aux valeurs quantitatives que l'on désire représenter
  => on utilise la juxtaposition de chiffres pour créer des nombres
- Dans ce mode de représentation, en base n on utilise n symboles (chiffres) différents. Mais la valeur du chiffre change selon sa position
- Si un naturel X s'écrit en base β sur N chiffres

  $$X_{N-1}X_{N-2}\ldots X_1X_0$$

  la correspondance entre la valeur de X et celles des chiffres est donnée par l'équation:

  $$X = \sum_{i=0}^{N-1} \beta^i x_i$$

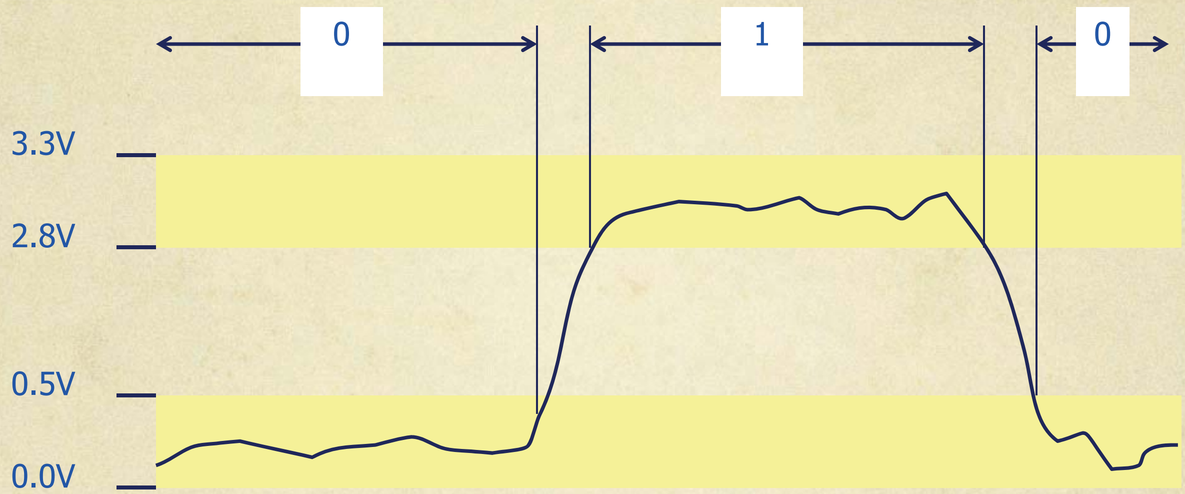
Numération de position

- Chaque chiffre dans un nombre se voit attribuer un facteur de pondération, ou "poids", qui dépend de sa position dans le nombre.
- Nombre N_b dans une base b:
  - $N_b = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , a_{-1} \ldots a_{-m}$ (numération de position)
- Exemples :
  - $N_{10} = 273.15$ $N_2 = 10110.01$
- En informatique, on appelle X_0 le chiffre de poids faible (ou moins significatif, LSB), et X_{N-1} le chiffre de poids fort (ou plus significatif, MSB)

Base 10 et base 2

- Si, dans la vie courante, nous utilisons la base 10, les ordinateurs utilisent la base 2
- Les problèmes de la base 10 sont:
  - difficulté de stockage
  - difficulté de transmission des 10 niveaux de signal nécessaires
  - difficulté d'implémentation des fonctions logiques et arithmétiques
- Par contre, la base 2 est facile à stocker, à l'aide d'éléments électroniques bistables, et sa transmission est fiable, même sur des environnements bruyants et imprécis

Base 10 et base 2



Système de numération "Décimal"

- Basé sur dix symboles, soit les chiffres de "0 .. 9"
- Ces chiffres sont classés de droite à gauche "unités, dizaines, centaine, milliers, ..."
- Chaque nombre peut être représenté par un vecteur:
  N(k-1), .. N(2), N(1), N(0)
- Nbr = $N(k\text{-}1).10^{k\text{-}1} + ...+ N(2).10^2 + N(1).10^1 + N(0).10^0$
  Nbr = $\sum_{i=0}^{k-1} N_i\,.\,10^i$ avec $N_i \in \{0, 1, 2, ...8, 9\}$
  Nbr $\in [0, 10^k - 1]$
- Exemple:
  espace de dimension k = 3 (3 chiffres), nombres de 000 à 999
  $483 = 4 . 10^2 + 8 . 10^1 + 3 . 10^0$

Système de numération "Binaire"

- Basé sur deux symboles, soit les chiffres 0 et 1 !
- Ces chiffres sont classés de droite à gauche "unités, multiple de 2, multiple de 4, multiple de 8, ..."
- Chaque nombre peut être représenté par un vecteur:
  N(k-1), .. N(2), N(1), N(0)
- Nbr = $N(k\text{-}1).2^{k\text{-}1} + ...+ N(2).2^2 + N(1).2^1 + N(0).2^0$
  Nbr = $\sum_{i=0}^{k-1} N_i\,.\,2^i$ avec $N_i \in \{0, 1\}$
  Nbr $\in [0, 2^k - 1]$
- Exemple:
  espace de dimension k = 3 (3 chiffres), nombres de 000 à 111

Système de numération "Hexadécimal"

- Basé sur seize symboles (10 chiffres + 6 lettres), soit :

  0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

- Il s'agit d'une base multiple du binaire : **16 = 2^4**

- Très utilisée pour représenter les nombres binaires de manière compacte :

  1 chiffre hexadécimal <=> 4 chiffres binaires

  Exemple: 0xC => 0b1100

$$\sum_{i=0}^{k-1} N_i . 16^i$$

Format de la représentation

- En base β, sur N chiffres, on peut représenter tous les naturels au sens large entre 0 et β_{N-1}

- Les ordinateurs ont un format pour représenter les nombres, c'est-à-dire un nombre de chiffres pré-établi. Pour cette raison, il est parfois utile d'écrire également les zéros à gauche

- Exemple: en base 2, sur 4 chiffres, on peut représenter les naturels entre 0 et 15, et les chiffres en hexadécimal

Dec	Bin	Hex	Dec	Bin	Hex	Dec	Bin	Hex	Dec	Bin	Hex
0	0000	0	4	0100	4	8	1000	8	12	1100	C
1	0001	1	5	0101	5	9	1001	9	13	1101	D
2	0010	2	6	0110	6	10	1010	A	14	1110	E
3	0011	3	7	0111	7	11	1011	B	15	1111	F

Systèmes de numération : **Notations**

- Convention : base explicitée si autre que dix ou si risque d'ambiguïté
- Exemples de notation :
  - En base 2 : 10012, ou 0b1001, ou B"1001"
  - En base 16 : 0xA2E, ou A2E16, ou A2Ehex, ou h'A2E
- Vocabulaire : un chiffre binaire est appelé bit :
  - contraction de "binary digit",
    signifie aussi "petit morceau"

Conversion dans une base B

- N_b converti en base B:
  - $N_B = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-m} b^{-m}$
- Exemple:

$N_2 = 1101$; $b=2$ dans base $B=10$

d'où

$$N_{10} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13$$

Les opérations doivent être faites dans la base B

Conversion Binaire à Décimal

- Utilisation de la numération de position :
  - $N_2 = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \ldots + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot 2^{-m}$

- p. ex.:

  N_2 = 1001,1 en utilisant la représentation
  $N_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1}$

  en calculant en base 10 nous obtenons 9,5

  d'où $N_{10} = 9,5$

  Les opérations sont faites en base 10

Conversion Binaire à Décimal

- Passage de binaire à décimal:

$$
\begin{aligned}
01101011 \quad &= 0x2^7+1x2^6+1x2^5+0x2^4+1x2^3+0x2^2+1x2^1+1x2^0 \\
&= 64+32+8+2+1 \\
&= 107
\end{aligned}
$$

Conversion Décimal à Binaire

- Utilisation de la numération de position :

$$N_{10} = a_n \ \ a_{n-1} \ \dots \ a_0 \ \ a_{-1} \ \dots$$
$$N_{10} = a_n \ . \ 10^n + \dots + a_0 \ .10^0 + a_{-1} \ . \ 10^{-1} + \dots$$

pour obtenir la valeur en base 2 :

$$N_2 = a_n \cdot 1010^n + \dots + a_0 \cdot 1010^0 + a_{-1} \cdot 1010^{-1} + \dots$$

calcul impossible pour nous, car il doit être fait dans la base 2 !

Conversion Décimal à Binaire

- Partie entière E (à m+1 chiffres) d'un nombre, sous forme polynomiale, en base b :
  - $E_b = a_m \bullet b^m + a_{m-1} \bullet b^{m-1} + \dots + a_1 \bullet b^1 + a_0 \bullet b^0$
  - $E_b = (a_m \bullet b^{m-1} + a_{m-1} \bullet b^{m-2} + \dots + a_1) \bullet b^1 + a_0$
- Le reste de la division E_b / b est a_0
- Les restes des divisions successives par la base b souhaitée donnent les chiffres du nombre en base b, à partir de la virgule

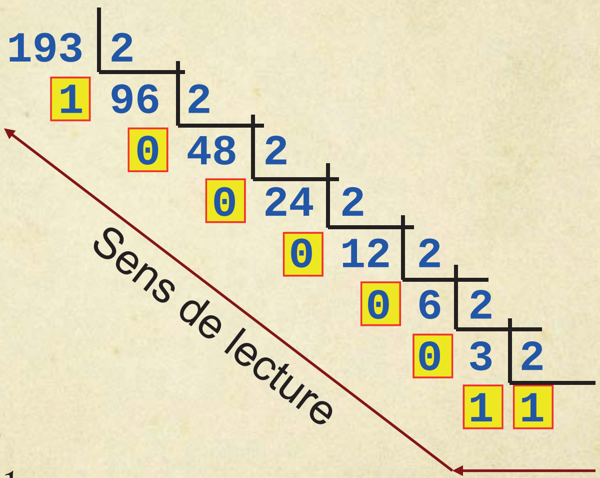
Conversion Décimal à Binaire

- Partie fractionnaire F (à k chiffres) d'un nombre, sous forme polynomiale, en base b :
  - $F_b = a_{-1} \bullet b^{-1} + a_{-2} \bullet b^{-2} + \ldots + a_{-k} \bullet b^{-k}$
  - $F_b = (a_{-1} \bullet b^{0} + a_{-2} \bullet b^{-1} + \ldots + a_{-k} \bullet b^{-k+1}) \bullet b^{-1}$
- La partie entière de la multiplication $F_b \bullet b$ est a_{-1}
- Les parties entières des multiplications successives par la base b souhaitée donnent les chiffres du nombre en base b, à partir de la virgule

Conversion Décimal à Binaire

- Passage de décimal à binaire:

193 = ?



193 = 0b11000001

Conversion Décimal à Binaire

- Les calculs seront faits en décimal
- Exemple : $1993.8_{10} = ?_2$
  - Partie entière

1/2

0	1	3	7	15	31	62	124	249	498	996	1993
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	

reste

Conversion Décimal à Binaire

- Partie fractionnaire

2x

0.8	0.6	0.2	0.4	0.8	…			
,	1	1	0	0	1	1	0	0

partie entière

Conversion binaire à hexadécimal

- Il suffit de grouper les chiffres binaires 4 par 4
- Exemple :
  - $N_2 = \underbrace{1001}\ \underbrace{0110}\ \underbrace{1100}\ \underbrace{0100}$

    $N_{16} = 9 \quad 6 \quad C \quad 4 \quad = 96C4$

souvent noté : 0x96C4 ou 096C4hex

Conversion hexadécimal au binaire

- Il suffit de scinder chaque chiffre hexadécimal en 4 bits (chiffre binaire)
- Exemple :
  - $N_{16} = 5 \quad 6 \quad E \quad 4 \quad = 56E4$

    $N_2 = \overbrace{0101}\ \overbrace{0110}\ \overbrace{1110}\ \overbrace{0100}$

souvent les '0' non significatif ne sont pas écrit :

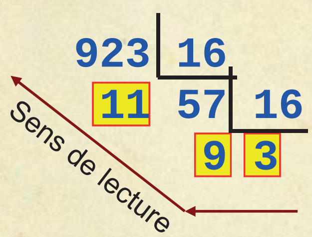
N_2 = (0)101 0110 1110 0100

Conversion hexadécimal au décimal

- Même principe que du binaire au décimal
- A8CE $= 10 \times 16^3 + 8 \times 16^2 + 12 \times 16^1 + 14 \times 16^0$
  $= 40960 + 2048 + 192 + 14$
  $= 43214$

Conversion décimal à hexadécimal

- Même principe que le passage décimal au binaire
- 923 = ?



923 = 0x39$\underbrace{\mathrm{B}}_{11}$

Exercice série I

1. Déterminer la relation qui permet de connaître la valeur maximale Val_{max} , en décimal, d'une représentation en binaire de nombre entier non signé sur n bits

Solution: $Val_{max} = 2^n - 1$

Exemple: n = 4 bits ➔ $Val_{max} = 2^4 - 1 = 15_{10}$ $(= 1111_2)$

Exercices série I

4. N_{10} = 179 = en binaire ?

1/2

0	1	2	5	11	22	44	89	179
1	0	1	1	0	0	1	1	

N_2 = 10110011

Exercices série I

5. N_{10} = 0,45 = en binaire ?

0,45	0,9	0,8	0,6	0,2	0,4	0,8	0,6	0,2	….
0 ,	0	1	1	1	0	0	1	1	

$\times 2$

N_2 = 0,01110011...

Exercices série I

6. Passage de binaire à hexadécimal:

$$N_2 = \underbrace{0110}_{6}\ \underbrace{1011}_{B}\ \underbrace{0101}_{5} =$$

$$N_{16} = 6 \quad B \quad 5$$

7. Passage d'hexadécimal à binaire:

$$A8CE = \overbrace{1010}^{A}\ \overbrace{1000}^{8}\ \overbrace{1100}^{C}\ \overbrace{1110}^{E}$$

Exercices série I

8. Passage de binaire à hexadécimal:

$$N_2 = \underbrace{1001}\underbrace{0110},\underbrace{1001}\underbrace{01\textcolor{red}{\mathit{00}}} =$$

$$N_{16} = 9 \quad 6 \;,\; 9 \quad 4$$

9. Passage d'hexadécimal à binaire:

$$B75.17 = \overbrace{1011}^{B}\ \overbrace{0111}^{7}\ \overbrace{0101}^{5},\overbrace{0001}^{1}\ \overbrace{0111}^{7}$$

Code BCD, Binary Coded Decimal

- Représentation du décimal directement en binaire en utilisant uniquement les codes de
  0 à 9 des nombres binaires codés sur 4 bits.
- Exemple : Décimal en BCD

  $N_{10} = 6 \quad 7 \quad 9$

  $N_{BCD} = \overbrace{0110}^{6}\ \overbrace{0111}^{7}\ \overbrace{1001}^{9}$

- Le BCD n'utilise qu'une partie des codes possibles :
  - 12 bits en BCD => max 999
  - 12 bits en binaire => max 2^{12}-1 = 4095

Conversion d'un nombre BCD

- ATTENTION :

  Le nombre BCD est toujours en décimal !

- Il faut donc utiliser la conversion décimal à binaire pour obtenir sa valeur en binaire.

Exercices série I

8. Passage de BCD à décimal

   N_{BCD} = 0110 1001 0101

   N_{10} = 6 9 5

9. Passage de BCD à binaire

   a) N_{BCD} = 0111

   N_2 = 0111

   b) N_{BCD} = 0100 0101 1001

   N_2 = 0001 1100 1011 car N_{10} = 459

EXERCICES