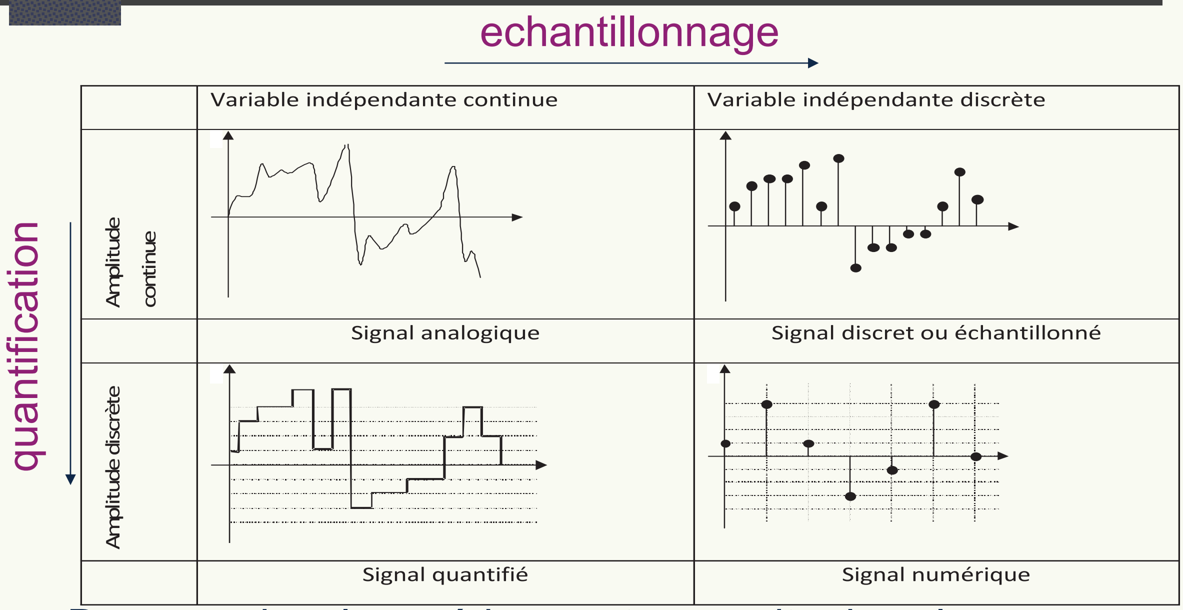
SAV
Traitement du signal 2

Romuald Mosqueron

Septembre 2017

Numérisation



Donc un signal numérique est une suite de valeurs

- Ces valeurs sont codées sur un certain nombre de bits
- C'est donc une suite de 0 et de 1

Signal numérique

- La numérisation d'un signal est une perte d'information
- Permet d'effectuer les traitements sur des machines informatiques, spécialisées ou non
  - Puissance, rapidité, coût
  - Flexibilité: facile à modifier, ex. : modems numériques), contrairement aux montages électroniques ...
- Codage interne des 0 et des 1 souvent en 0/5V : A priori pas d'altération du signal, robuste au bruit une fois numérisé
  - Précision insensible au temps, à la température, etc.
  - Pas d'erreur lors de la transmission, la recopie, le stockage, etc.
- Adéquation entre simulation et traitement : simuler du numérique, c'est en faire !

Signal numérique

Un **signal discret** est une suite de valeurs numériques réelles ou complexes, appelées échantillons.
Notation: $\{x_n\}$ avec n un nombre entier ;
x_n : échantillon, n numéro de l'échantillon.

L'amplitude d'un échantillon en particulier sera distinguée à l'aide d'un indice de la variable indépendante. Par exemple x(n1), x(n2).

Lorsque le signal discret a son amplitude quantifiée (ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs), il est appelé **signal numérique**.

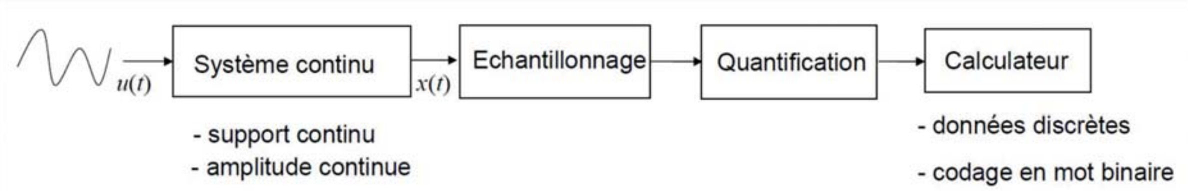
Signal numérique

Applications: TV numérique, enregistrement audio, vidéo, téléphonie mobile.

On ne peut pas dire que Numérique > analogique

- Dépend de la qualité de l'échantillonnage et de la quantification
- On ne peut pas dire l'inverse non plus !
- Il est nécessaire de comprendre comment se fait le passage du monde analogique à celui du numérique.

Conversion A/D



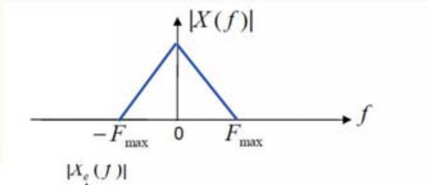
Période d'échantillonnage Te = Δt, exprimée en seconde.
Fréquence d'échantillonnage fe = 1/Te exprimée en hertz.
Echantillons répartis régulièrement selon le temps.
Signal analogique temporel : $x(t)$
Signal discret temporel : $x(t = n \cdot \Delta t) = x\left(\dfrac{n}{f_e}\right)$ avec n entier

Notation x(n), où la notion temporelle n'apparaît pas (c'est comme si on avait choisi Δ t = 1 s).
Pour revenir au cas temporel, il suffit de multiplier n par Δt.

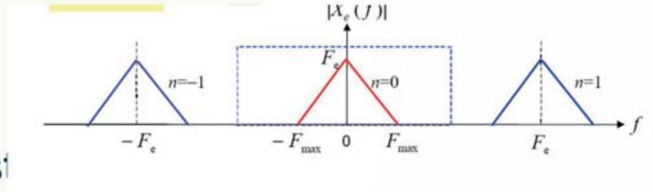
Conséquences

On considère que x(t) est un signal réel dont le spectre est borné en fréquence, de fréquence maximale F_{max} i.e.

$$\forall \; |f| > F_{max}, |X(f)| = 0$$



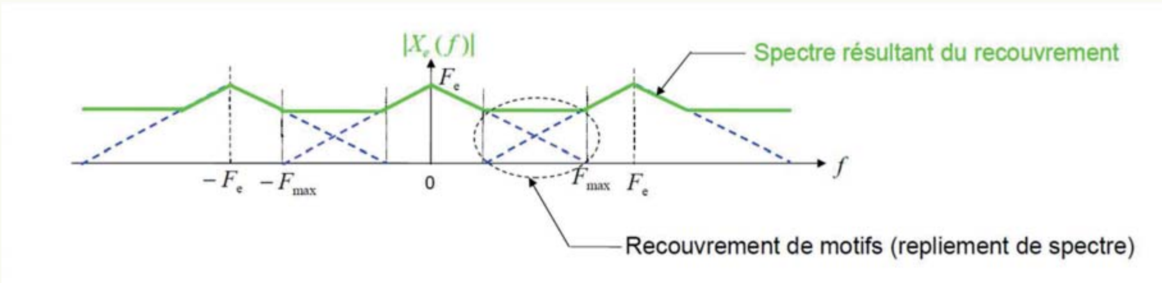
Cas 1 : $F_e \geq 2 \cdot F_{max}$



Le motif principal (n = 0) es
égal au spectre de **x(t)**. Comme les motifs sont disjoints, on peut extraire ***X(f)*** grâce a un filtre passe-bas idéal et donc reconstituer intégralement le signal ***x(t)*** à partir de la connaissance de son «échantillonné» ***x_e(t).***

Conséquences

Cas 2: $F_e < 2 \cdot F_{max}$



Les motifs élémentaires de **|*X_e(f)*|** se recouvrent. On parle de repliement de spectres.
=> il n'est pas possible de récupérer le spectre ***X(f)*** par un filtrage approprie. Il n'est donc pas possible de reconstruire le signal initial ***x(t)*** à partir de la connaissance de son échantillonné ***x_e(t)***.

Théorème de Shannon

Question : quelle est la condition sur F_e pour qu'à partir du signal échantillonné $x_e(t)$, on puisse reconstruire intégralement x(t) ?

- $F_e \geq 2*F_{max}$ pas de recouvrement de spectre -> extraction de $X(f)$ par filtrage passe-bas idéal

- $F_e < 2*F_{max}$ repliement de spectre -> impossibilité de récupérer $X(f)$ par filtrage

Par conséquent, pour que la répétition périodique du spectre de $x_e(t)$ ne déforme pas le spectre $X(f)$ répété, il faut et il suffit que $F_e \geq 2*F_{max}$

Théorème de Shannon

La condition nécessaire et suffisante pour échantillonner un signal sans perte d'information est que la fréquence d'échantillonnage F_e soit supérieure ou égale au double de la fréquence maximale du signal.
Plus précisément, si on note F_{max} la fréquence maximale du signal, il faut et il suffit que : $F_e \geq 2*F_{max}$

Pour F_e fixée, $F_e/2$ est appelée fréquence de Nyquist : c'est la fréquence maximale admissible du signal pour éviter les distorsions de spectre.

Signaux large bande

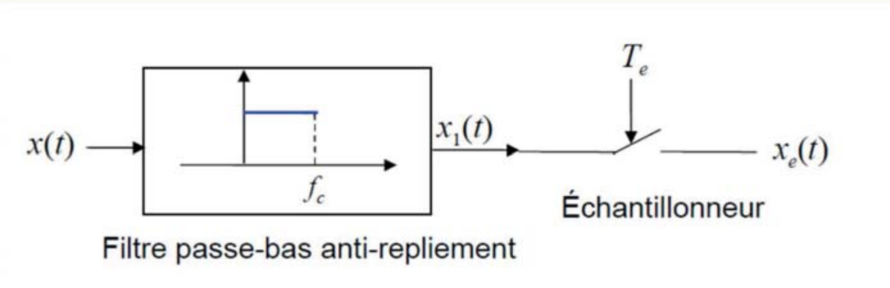
Dans le cas des signaux à support fréquentiel infini, il est impossible de définir une notion de fréquence maximale. Quelque soit la fréquence d'échantillonnage F_e , il y a toujours un recouvrement spectral.
=> La présence d'un tel recouvrement spectral (effet de repliement, aliasing effect) entraîne la non-réversibilité de la transformation.

Les signaux réels comportent souvent une composante fréquentielle à large bande due à la présence de bruit (perturbations aléatoires), ce qui imposerait une fréquence F_e importante.

Signaux large bande

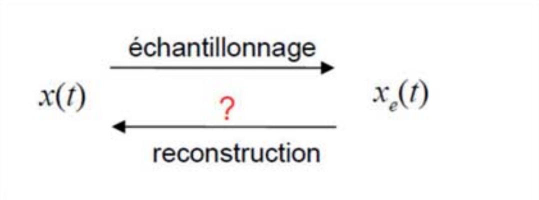
L'échantillonnage de tout signal dont le spectre n'est pas strictement à bande limitée implique l'apparition du phénomène de recouvrement spectral. Pour réduire le risque de recouvrement spectral, on place, dans la pratique, un filtre passe-bas avant l'échantillonneur (filtre anti repliement).

D'une manière générale, afin de garantir la condition de Shannon, il faut utiliser un filtre passe-bas anti-repliement de fréquence de coupure fc inférieure à Fe /2.



Reconstruction du signal D/A

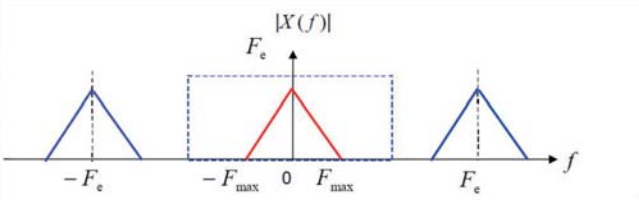
On a échantillonné un signal ***x(t)*** en respectant le théorème de Shannon, comment fait-on pour le reconstruire à partir des échantillons?



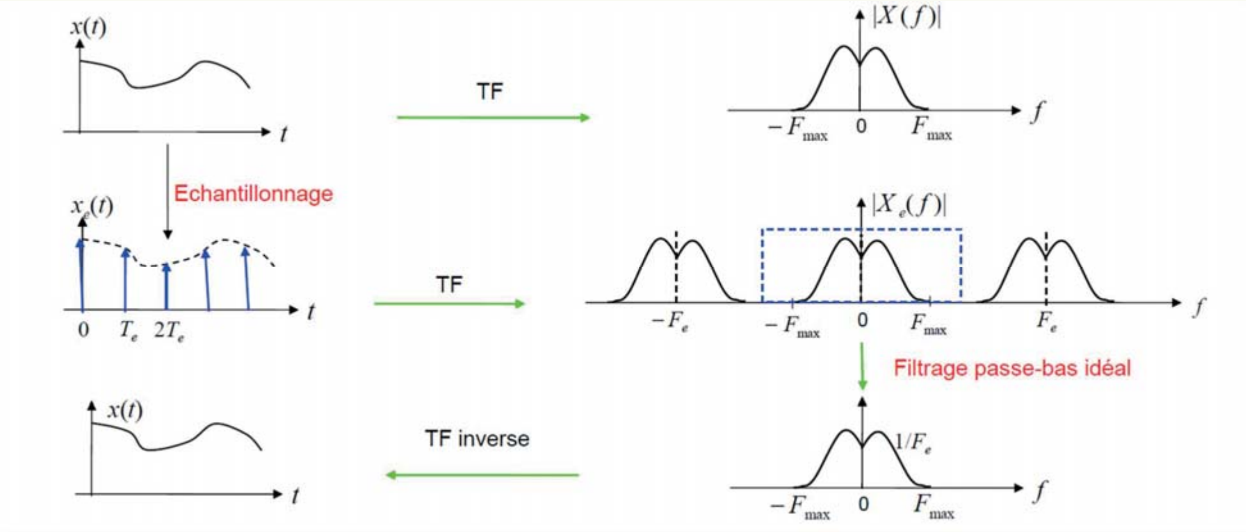
Hypothèse: La condition de Shannon a été respectée lors de l'échantillonnage (***x(t)*** est à support borné en fréquence ou filtrage anti-repliement) + Echantillonnage idéal

Solution : pour reconstruire le signal, il suffit de prendre la TF inverse du motif de base de $X_e(f)$.

- Filtrage passe bas idéal
- Diviser par F_e
- Puis TF inverse



Reconstruction du signal D/A



Fonction de transfert

On appelle la fonction de transfert d'un système, le rapport de la transformée de laplace ou en Z du signal de sortie à celui de l'entrée.

Pour un système linéaire continu et invariant, nous avons vu que la relation entre la sortie s(t) et l'entrée e(t) est donnée par une équation différentielle linéaire à coefficients constants de la forme :

$$a_0 \cdot s(t) + a_1 \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + a_n \cdot \frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} = b_0 \cdot e(t) + b_1 \cdot \frac{de(t)}{dt} + \ldots + b_m \cdot \frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m}$$

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, on obtient :

$$a_0 S(p) + a_1[PS(p)-s(0)] + \ldots\ldots + a_n\ [p^n S(p) - p^{n-1}s(0) - \ldots\ldots - s^{n-1}(0)] = b_0 E(p) + b_1[PE(p)-e(0)] + \ldots\ldots + b_n\ [p^n E(p) - p^{n-1}e(0) - \ldots\ldots - e^{n-1}(0)]$$

Fonction de transfert

D'où

$$S(p) = \frac{b_0 + b_1\, p + \ldots + b_m\, p^m}{a_0 + a_1\, p + \ldots + a_n\, p^n} . E(p) + \frac{CI(p)}{a_0 + a_1\, p + \ldots + a_n\, p^n}$$

Où *CI(p)* est un polynôme qui dépend des conditions initiales. Sil les conditions initiales sont nulles alors, *CI(p)=0* et nous pouvons exprimer le rapport :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1\, p + \ldots + b_m\, p^m}{a_0 + a_1\, p + \ldots + a_n\, p^n}$$

n étant l'ordre du système

Ce rapport correspond à la ***fonction de transfert*** ou la ***transmittance opérationnelle*** du système. En effet, la transmittance opérationnelle d'un système est le rapport *S(p) /E(p)*

lorsque les conditions initiales sont nulles.

Définitions de poles et zéros

On considère un filtre H de fonction de transfert H(z) = P(z)/Q(z) . P est un polynôme appelé numérateur et Q est un polynôme appelé dénominateur. On appelle zéros de H les racines de P et on appelle pôles de H les racines de Q.

La fonction de transfert apparaissant sous la forme d'une fraction rationnelle, on peut définir les pôles et les zéros de la fonction de transfert.

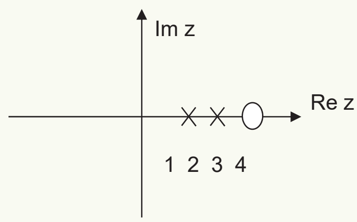
$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

zéros de $H(z)$: racines de $N(z) = 0$
pôles de $H(z)$: racines de $D(z) = 0$
On peut les représenter dans le plan complexe. Une croix représente un pôle, un cercle représente un zéro.

Définitions de poles et zéros

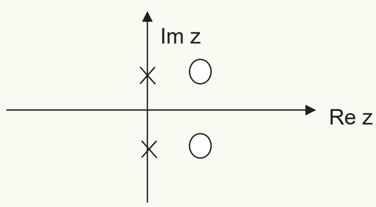
Exemple : $H(z) = \frac{z-4}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z-4}{(z-2)(z-3)}$

Deux pôles : 2 et 3
Un zéro : 4



Autre exemple :

$$H(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z^2 + 1} = \frac{[z - (1+j)]\cdot[z - (1-j)]}{(z+j)\cdot(z-j)}$$



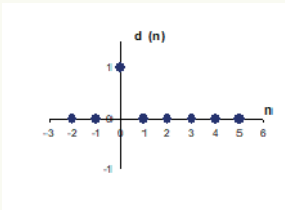
Deux pôles : j et - j
Deux zéros : 1 + j et 1 - j

Réponse impulsionnelle

On appelle réponse impulsionnelle d'un système numérique la réponse à une excitation d(n) (impulsion unité). Cette réponse impulsionnelle est notée h(n).
Comme la transformée en z de d(n) est égale à 1, on a :
h(n) = transformée en z inverse de H(z).
On peut aussi calculer la réponse impulsionnelle directement à partir de l'équation aux différences.

$$d(n) = \begin{cases} 1 \text{ pour n} = 0 \\ 0 \text{ pour n} \neq 0 \end{cases}$$

noté aussi $\delta(n)$



Transformée de Fourier (TFD)

Objectif : On veut calculer la TF d'un signal discret à l'aide d'un calculateur
Difficultés: Le calcul de la TF nécessite une infinité de points de mesures x(n) (pas toujours possible dans la pratique : contraintes temps réel, etc.)
Tout en conservant un intérêt théorique très grand, la forme de la transformée de Fourier, telle qu'elle a été définie, n'est pas directement utilisable dans les applications pratiques. Elle fait appel, d'une part, à un nombre infini d'échantillons qu'on ne peut pas manipuler pratiquement ; d'autre part, la variable f représentant la fréquence est continue et n'est donc pas compatible avec la nature discrète des systèmes de traitement numériques des signaux.

Transformée de Fourier (TFD)

On définit alors la transformation de Fourier discrète TFD (DFT en anglais).

Le remplacement de la variable continue f par une variable numérotée k peut se faire de la manière suivante : $\boldsymbol{f = k\,\Delta f}$

où Δ f est l'incrément utilisé sur l'axe des fréquences.

Les fréquences discrètes $\boldsymbol{f_k = k\,\Delta f}$ sont appelées fréquences harmoniques de la TFD.

- Limiter la durée de ***x(n)*** i.e. considérer un nombre fini *N* de points temporels
- Discrétiser la fréquence (considérer un nombre fini *K* de points fréquentiels)

A un nombre fini de valeurs *x*(1) , …, *x*(*N*), on fait correspondre un nombre fini de valeurs *X*(*f*1), …, *X*(*fK*) telle que la TFD de *x* soit une approximation aussi bonne que possible de *X*(*f*)

Transformée de Fourier (TFD)

Comme X(f) est périodique en f de période f_e, il suffit d'utiliser la substitution f = k Δ f sur une seule période. On peut diviser une période en K incréments et l'on a alors $\Delta f = f_e / K = 1/K\,\Delta t$

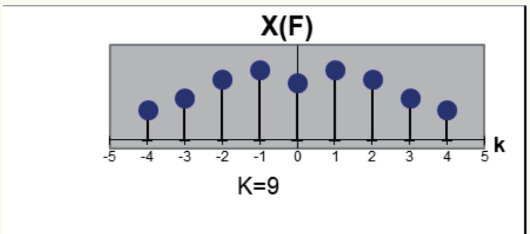
Donc :

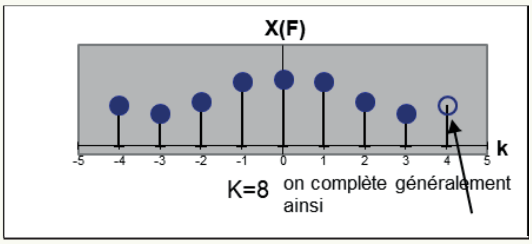
$F = k\,\Delta f = k\,f_e / K$ ou $F = f/f_e$

En utilisant la période principale :

K paire : k va de –K/2 à K/2 - 1

K impaire : k va de – (K – 1)/2 à +(K – 1)/2

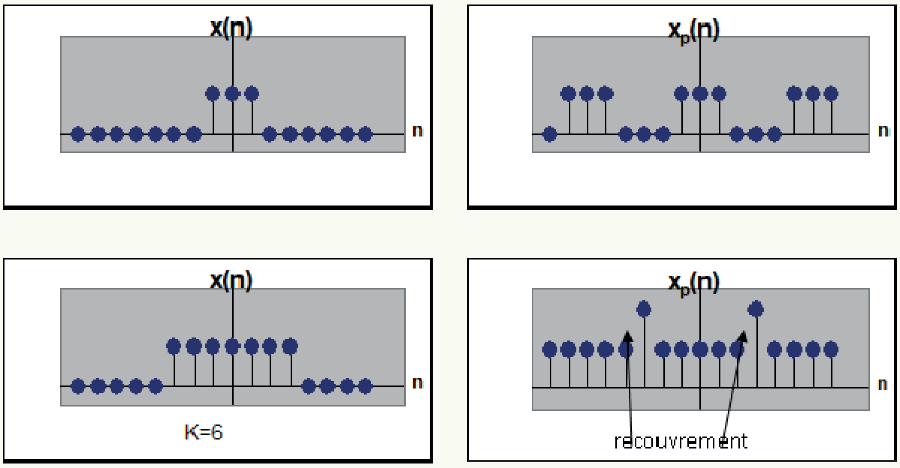




Transformée de Fourier (TFD)

- $x(n)$ n'est pas périodique ; sa durée est limitée à K : chaque période du signal $x_p(n)$ est une réplique exacte de $x(n)$.
- $x(n)$ n'est pas périodique ; sa durée est supérieure à K : il y a recouvrement et une période de $x_p(n)$ n'est pas une réplique exacte de $x(n)$.

Exemples :
durée = 3
et durée = 7.



Transformée de Fourier (TFD)

- Ainsi, la relation approximative ne devient une identité exacte que pour des signaux $x(n)$ à durée limitée.
- Si un signal a une durée M < K, on peut toujours le considérer comme un signal de durée K en le prolongeant par K-M échantillons nuls.
- $X(n)$ est périodique de période N échantillons N = K ; tout le signal $x_p(n)$ est une réplique exacte de $x(n)$.
- On en déduit donc : pour une TFD : N = K.
- Le nombre d'échantillons N du signal temporel détermine le nombre d'échantillons K de sa transformée de Fourier.

Transformée de Fourier (TFD)

On veut utiliser la TFD pour analyser le contenu fréquentiel d'un signal continu x(t). Ceci impose les opérations suivantes :

1) Echantillonnage de x(t)

=> choix de la fréquence d'échantillonnage Fe (fixé par le th de Shannon)

2) Quantification pour générer le signal discret x(n)

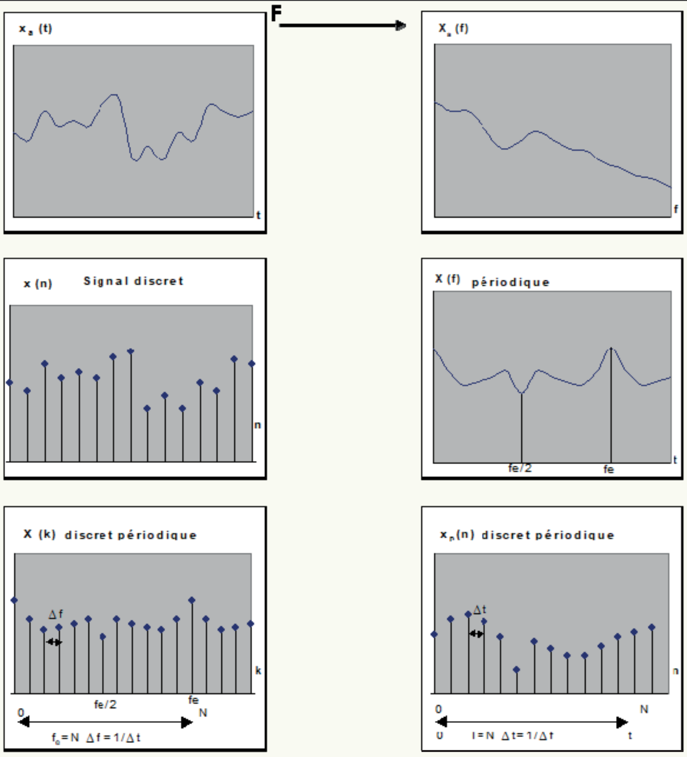
3) Troncature de x(n) à N échantillons

4) Discrétisation du domaine fréquentiel en K points

1 et 2 => Numérisation

3 et 4 => TFD, problèmes!

Transformée de Fourier (TFD)



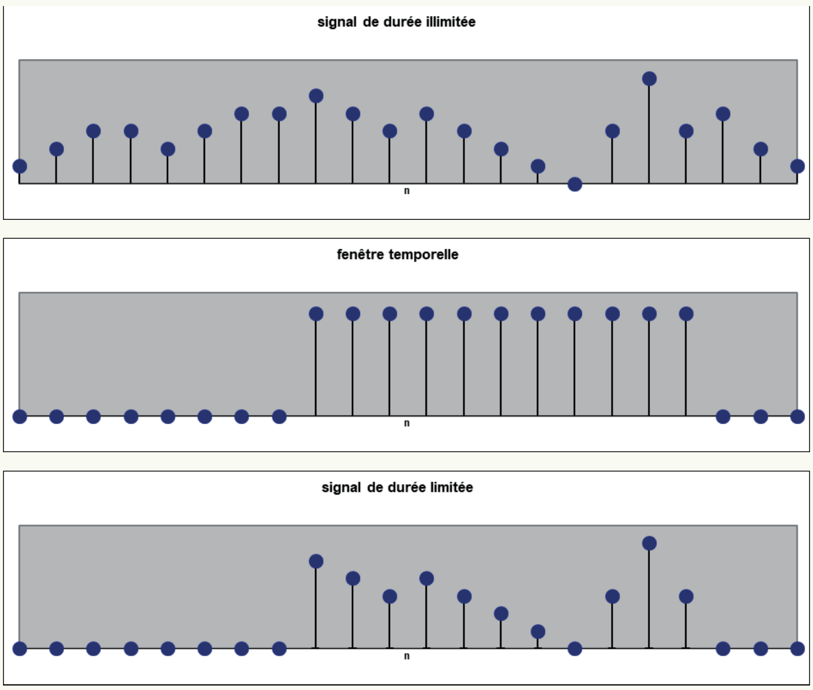
TFD de signaux de durée ∞

Nous avons vu qu'un signal x(n) ne peut être représenté complètement par N échantillons de sa transformée de Fourier que si sa durée est limitée à N. On ne peut pas définir exactement la TFD d'un signal à durée illimitée.

La TFD dans ce cas n'est définie qu'approximativement en limitant la durée du signal par un moyen approprié.

La manière la plus simple est de limiter brutalement la durée d'un signal en le *multipliant par un signal rectangulaire* de durée N . Un tel signal est souvent appelé ***fonction fenêtre temporelle*** ou, simplement, **fenêtre temporelle**.

TFD de signaux de durée ∞



TFD de signaux de durée ∞

Comment placer la fenêtre temporelle par rapport au signal ?

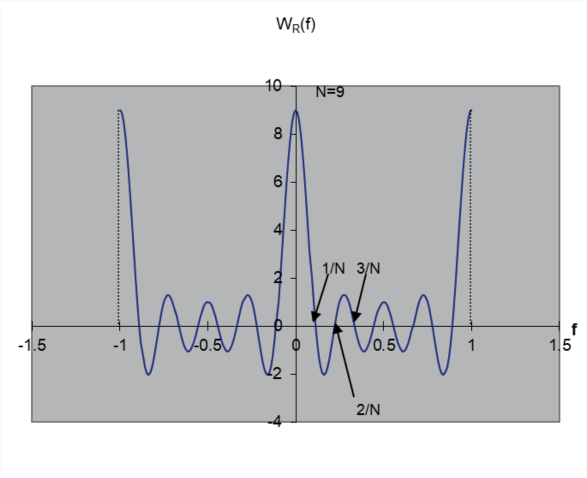
Quelle doit être la durée de la fenêtre ?

⇒ Pour positionner la fenêtre, le signal x(n) doit être connu. Toutefois, en règle générale, la position de la fenêtre est choisie de manière à conserver les échantillons importants du signal et à négliger (annuler) ceux qui sont d'amplitude relativement petite.

Bien que ce ne soit pas une règle générale, les fenêtres étudiées seront placées soit symétriquement autour de l'origine, soit à partir de l'origine.

TFD de signaux de durée ∞

$W_R(f)$ est la transformée de Fourier de la fenêtre temporelle et s'appelle fenêtre spectrale.
Le signal $x_N(n)$ étant maintenant de durée limitée, on peut en calculer la TFD. Les coefficients $X_N(k)$ de cette TFD représentant approximativement les échantillons prélevés sur X(f).



TFD de signaux de durée ∞

Dans l'intervalle principal [-1/2 ,1/2], cette fonction est composée d'un pic central de largeur de base 2/N et de lobes secondaires s'atténuant vers les extrémités de l'intervalle. Les zéros de $W_R(f)$ sont aux fréquences $f_i = i/N$ avec $i \neq mN$ (i et m entiers).
Le rapport des amplitudes du pic central et du premier lobe secondaire de $W_R(f)$ varie très peu en fonction de N.

Pour	N = 9	$W_R(0)/ W_R(1.5N\ )$	= 4.5
	N = 50		= 4.705
	N = 100		= 4.711
	N -> ∞		= $3\pi/2$ =4.712

Fenêtrage

Avec un ordinateur, il est impossible de calculer la transformée de Fourier d'un signal discret.
En effet il faudrait un temps et une mémoire infinis Pour ces raisons, on est toujours amené à travailler avec un nombre fini de points N. Cela revient à dire que les signaux exploités numériquement sont toujours une troncation de signaux réels.
On construira donc un signal tronqué $x_T[n]$. Il résulte de la multiplication des échantillons de x[n] par une fenêtre d'analyse (ou encore fenêtre de troncature) qui limitera $x_T[n]$ à N échantillons.

$$X_T(f) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{nf}{F_e}}$$

Fenêtrage

La fenêtre d'analyse est définie par une suite d'échantillons y[n] tels que :

$$\begin{cases} x_T[n] = y[n].x[n] \text{ pour } 0 \le n \le (N\text{-}1) \\ x_T[n] = 0 \text{ pour } n < 0 \text{ et } n > (N\text{-}1) \end{cases}$$

Mais le fait de tronquer un signal peut notablement affecter son spectre.

Fenêtrage

<u>Exemple :</u> troncation d'une sinusoïde par un fenêtrage rectangulaire.

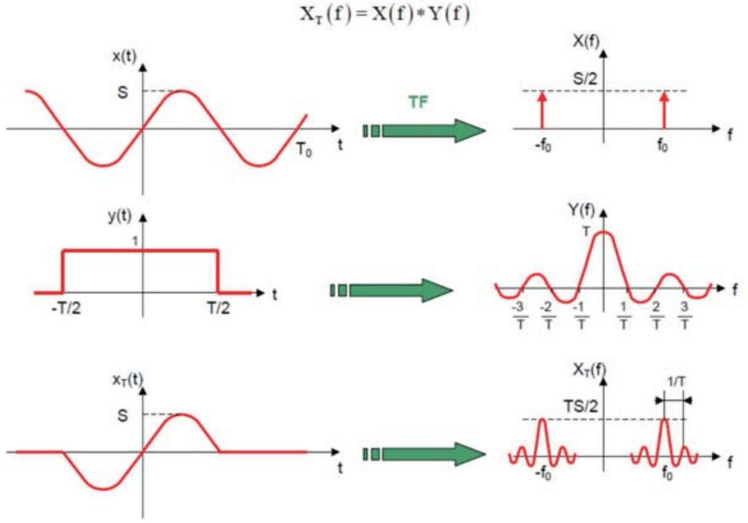
Soit $x(t) = S\cos(2\pi f_0 t)$ et $y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$

On sait que $X(f) = \frac{S}{2}[\delta(f\text{-}f_0)+\delta(f+f_0)]$ et que $y(f) = T\,\text{sinc}(Tf)$

Donc si on effectue la troncation de x(t) sur une durée T :

$$x_T(t) = x(t)\cdot y(t)$$

$$X_T(f) = X(f) * Y(f)$$



Exemple de fenêtre

Chaque type de fenêtre a une réponse en fréquence particulière (largeur du lobe principale, amplitude des lobes secondaires, …) qui permet de choisir au mieux la « bonne » en fonction des applications.
En général les résolutions en fréquence et en amplitude sont d'autant meilleures que le lobe principal est étroit et les lobes secondaires sont de faibles amplitudes.

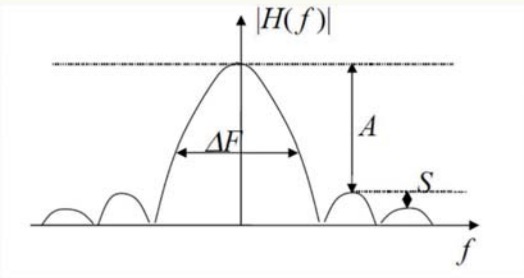
- Fenêtre de Hanning

$$h(n) = \begin{cases} 0.5\left(1 + \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right)\right), & n = 0, \cdots, N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

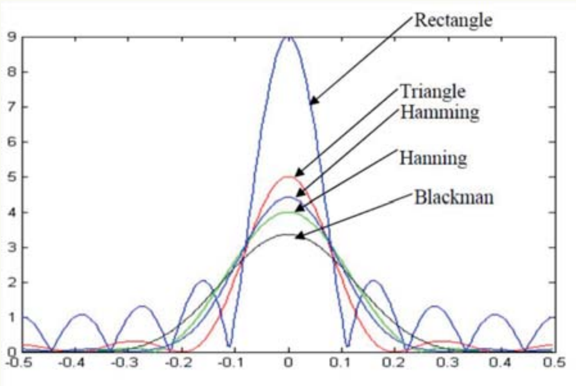
- Fenêtre de Hamming

$$h(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right), & n = 0, \cdots, N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Exemple de fenêtre



- rapport A entre les maximum du lobe central et des lobes secondaires de la TFD des fenêtres.
- atténuation des lobes secondaires de la TFD des fenêtres S.
- largeur du lobe central DF



Type de fenêtre	Rapport d'amplitude entre le lobe principal et le lobe secondaire	Largeur du lobe principal
Rectangulaire	-13dB	2/N
Triangulaire	-25dB	4/N
Hanning	-31dB	4/N
Hamming	-41dB	4/N
Blackman	-57dB	6/N

Echantilonnage en Fréquence

4.2.2 Echantillonnage en fréquence

En fait, lorsque l'on veut pouvoir représenter le spectre $X_T(f)$, il faut calculer $X_T(f)$ pour toutes les valeurs de f (f est une variable continue). Ceci est impossible avec un ordinateur ou un DSP qui ne peuvent traiter que des valeurs de f discrètes. Comme $X_T(f)$ est périodique de période F_e, on découpe donc cet intervalle en M parties égales et on ne calcule $X_T(f)$ que pour les multiples de F_e/M : on effectue un *échantillonnage fréquentiel* de pas $\Delta f = F_e/M$.

On remplace donc f par Δf et le calcul de la transformée de Fourier devient :

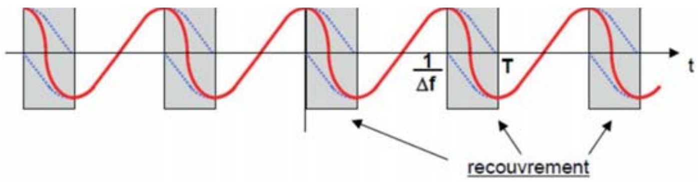
$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{n.k.\Delta f}{F_e}} \quad \text{pour } k = [0, 1, 2, \ldots, M-1]$$

$$X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{n.k}{M}} \quad \text{pour } k = [0, 1, 2, \ldots, M-1]$$

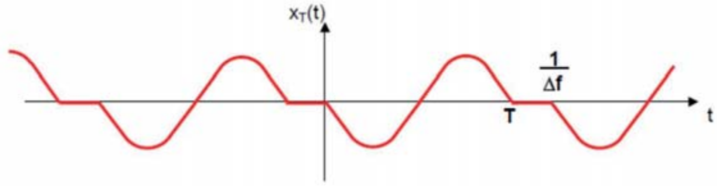
On vient ainsi d'introduire la **transformée de Fourier discrète**.

Le problème réside dans le choix du pas d'échantillonnage en fréquence et donc du choix de M. En effet, le fait d'échantillonner en fréquence revient à périodiser dans le domaine temporel la partie du signal qui a été tronquée :

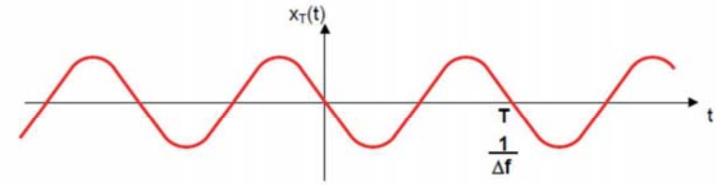
$$X_T[k] = \sum_{k \to -\infty}^{+\infty} X_T(f).\delta(f - k.\Delta f) \quad \xrightarrow{TF^{-1}} \quad \sum_{r \to -\infty}^{+\infty} x_T(t).\delta\left(t - \frac{r}{\Delta f}\right)$$



- **$\Delta f < 1/T$:** Il n'y aura plus de repliement temporel, mais des intervalles durant lesquels le signal dont on calcule le spectre sera nul…



- **$\Delta f = 1/T$:** On a un signal périodique idéal. On périodise la fenêtre temporelle choisie avant le calcul spectral.



En pratique, on choisira donc toujours Δf de telle sorte à avoir **$\Delta f = 1/T$**.

Comme $T = N.T_e$ et $\Delta f = \frac{F_e}{M}$, on en déduit que $\frac{F_e}{M} = \frac{1}{N.T_e} \Rightarrow M = N$:

Ainsi, la définition de la **transformée de Fourier discrète** devient :

$$\boxed{X_T[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_T[n] \cdot e^{-2j\pi \frac{n.k}{N}} \quad \text{pour } k = [0, 1, 2, \ldots, N-1]}$$

FFT Fast Fourier Transform

REDS heig-vd

$$X_p(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

Pour obtenir une valeur particulière de $X_T[k]$, il faut par exemple :
La FFT est tout simplement un moyen (un algorithme) efficace, économique et élégant, pour calculer la TFD.

Pour n = 0 :

$$X_T[k] = (x_T[0] \bullet \cos(0) - x_T[0] \bullet j\sin(0))$$

2 produits complexes et 1 somme complexes

Pour n = 1 :

$$X_T[k] = (x_T[0] \bullet \cos(0) - x_T[0] \bullet j\sin(0)) + \left[x_T[1] \bullet \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) - x_T[1] \bullet j\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\right]$$

4 produits complexes et 3 sommes complexes

Pour n = N-1 :
2N produits complexes et 2(N-1) sommes complexes

FFT Fast Fourier Transform

REDS heig-vd

Ainsi, pour obtenir les N valeurs de $X_T[k]$ il faut donc $2N^2$ multiplications et 2(N-1)N additions.
Par exemple, un signal où N=1024 échantillons (soit 1ko en mémoire si chaque échantillon est codé sur 8 bits), le nombre de multiplications est de :
2 097 152 et celui des additions de 2 095 104 !!!!
Si ces durées ne sont pas gênantes pour des traitement en temps différé, il n'en est pas de même en temps réel. En effet, plus le temps de calcul sera important et plus la fréquence maximale du signal à analyser sera réduite (Shannon).
Pour pouvoir utiliser la transformée de Fourier discrète en temps réel, on dispose d'algorithmes de calcul connus sous le nom de Transformée de Fourier Rapide (TFR) ou Fast Fourier Transform (FFT).

FFT Fast Fourier Transform

Sur un signal son wav de 6 secondes qui a 6*44100 = 264 600 points, on arrive à :

- 10^{11} opérations complexes !!!

La FFT va permettre de diminuer cela

FFT Fast Fourier Transform

Elle est basée sur les propriétés de W_N^{nk} et sur les propriétés des coefficients X(k) de la TD. Pour Δt = 1s,

Voir cours ch 1 page 1-38 à 1-44: très bien expliqué !!!

FFT Fast Fourier Transform

La transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, FFT) est un algorithme de calcul de la transformée de Fourier discrète. Cet algorithme a permis de rendre possible le calcul de TFD dans des applications embarquées, et on désigne souvent la TFD par FFT.

Exemple numérique. Un signal audio de 1 seconde échantillonné à 40KHz nécessite 40000 valeurs numériques.
Le calcul de sa FFT prend un temps de l'ordre de 400 ms (*)
La TFD classique prend un temps de l'ordre de 26 minutes !

FFT Cooley-Tuckey

On pose :

$$\boxed{X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n].W_N^{nk}} \qquad \text{avec } W_N = e^{\frac{-2j\pi}{N}}$$

<u>Propriétés de W_N :</u>

- $W_N^{2nk} = e^{\frac{-2j\pi nk}{N/2}} = W_{N/2}^{nk}$
- $W_N^{nk+N/2} = e^{\frac{-2j\pi(nk+N/2)}{N}} = -W_N^{nk}$

La condition d'utilisation est d'avoir un nombre d'échantillons puissance de 2 : $N=2^m$
Si on effectue un dédoublement temporel en séparant les indices paires et impaires :

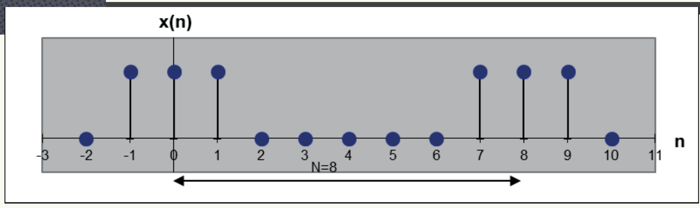
$$\begin{cases} x_1[n]=x[2n] \\ x_2[n]=x[2n+1] \end{cases}$$

En exploitant les propriétés de W_N, on trouve alors :

$$\boxed{\text{Pour } 0 \le k \le \frac{N}{2}-1 \quad \begin{bmatrix} X[k]=X1[k]+W_N^k.X2[k] \\ X\left[k+\frac{N}{2}\right]=X1[k]-W_N^k.X2[k] \end{bmatrix}}$$

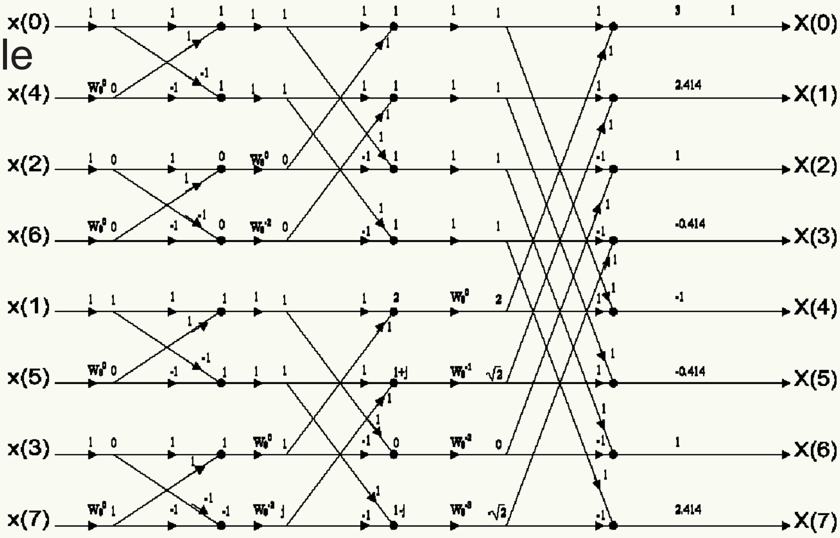
<u>Remarques :</u>
Le coût de calcul passe de l'ordre de $\mathbf{N^2}$ à $\mathbf{N \log_2 (N)}$.

FFT Signal N=8



Pour une TFD normale
64 multiplications,
56 additions
=120 opérations

Pour une TFR
12 multiplications,
24 additions
= 36 opérations



Transformée en Z

Jusqu'à présent, nous avons vu diverses transformations :
En analogique : la transformée de Fourier : $x_a(t) \leftrightarrow X_a(f)$
En analogique : la transformée de Laplace : $x_a(t) \leftrightarrow X_a(s)$
En numérique : la transformée de Fourier : $x(n) \leftrightarrow X(f)$
En numérique : la transformée de Fourier discrète : $x(n) \leftrightarrow X(k)$

Il manque encore l'équivalent de la transformée de Laplace pour les signaux numériques qui a l'avantage d'être plus générale que la transformée de Fourier et qui est utilisée pour définir les fonctions de transfert.
Cette transformation de Laplace pour signaux numériques s'appelle transformation en z.

Transformée en Z

La transformée en Z qui est très similaire à la transformée de Laplace, à ceci près qu'elle s'applique aux signaux à temps discret et est utilisée pour les filtres numériques.
Tout comme la transformée de Laplace, elle ne permet pas de prendre en compte le passé lointain d'un signal (en particulier on ne pas l'appliquer à des signaux périodiques), mais cette limitation permet une plus grande liberté dans l'utilisation de cet outil et une simplification des calculs.

Transformée en Z

Rappelons qu'en analogique, la transformée de Laplace s'écrit :

$$X_{\mathrm{a}}(s)=\int_{0}^{\infty} x_{\mathrm{a}}(t)\cdot \mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Pour un signal numérique, cette transformation peut s'écrire :

$$X(s)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cdot \mathrm{e}^{-sn\Delta t}$$

En effectuant le changement de variable :

$$z=\mathrm{e}^{s\Delta t}$$

On obtient la transformée en z :

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\cdot z^{-n}$$

Transformée en Z

Lorsque, comme indiqué, la somme sur n va de 0 à +∞ (c'est le cas des signaux causals), on parle de transformation en z unilatérale.
Lorsque l'on étend la somme de - ∞ à + ∞, on parle de transformation en z bilatérale.
Dans les deux cas, X(z) est généralement une fonction complexe de la variable complexe z.
Une série de puissance du genre $\sum x(n)z^{-n}$
pose tout de suite un problème de convergence. L'ensemble des valeurs de z pour lesquelles cette somme converge est appelée région de convergence.

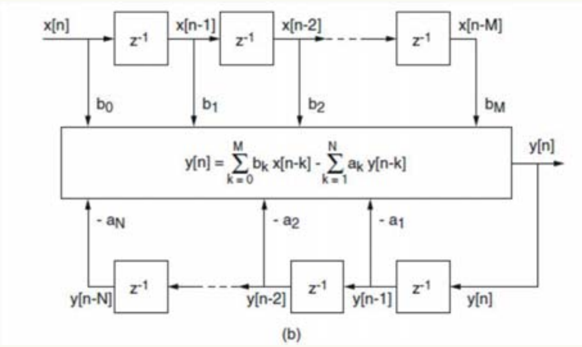
Transformée en Z

On remarque que le produit d'une transformée en z par z_{-1} correspond à un retard unité (n_0=1). C'est pourquoi on se réfère à z_{-1} comme opérateur de retard unité.

Cette propriété montre que le terme en z^n exprime le retard de l'échantillon de rang n, d'une durée égale à n fois la durée d'un échantillon

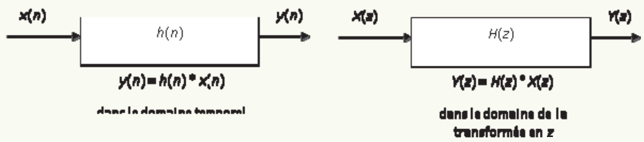
Transformée en Z

Un système pourrait être décrit par une équation aux différences d'ordre N : $y[n]+\sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]=\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$



Représentation d'un système

Un système numérique linéaire et invariant agit sur un signal d'entrée x(n) et produit un signal de sortie y(n). Le système peut être représenté par :



Il est bien plus facile de travailler avec des multiplications qu'avec des convolutions. On préférera donc la représentation faisant intervenir les transformées en *z*.

Trois opérateurs de base interviennent dans les systèmes numériques linéaires et invariants :

Retard unité

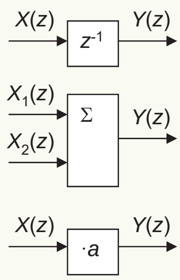
$y(n) = x(n\text{-}1)$ $\qquad$ $Y(z) = z^{-1} X(z)$

Addition

$y(n) = x_1(n) + x_2(n)$ $\quad$ $Y(z) = X_1(z) + X_2(z)$

Multiplication par une constante

$y(n) = a\, x(n)$ $\qquad$ $Y(z) = a\, X(z)$



Représentation d'un système

Le schéma-bloc détaillé d'un système numérique linéaire et invariant consiste alors en l'assemblage de ces opérateurs de base. Pour trouver le schéma-boc détaillé à partir de l'équation aux différences, il faut exprimer *y*(*n*) seul en fonction du reste :

Equation aux différences : $\sum_{i=0}^{n} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$

Equation aux différences réarrangée, pour isoler *y*(*n*) :

$$a_0 y(n) + \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{j=0}^{M} b_i x(n-i)$$

$$a_0 y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_i x(n-i) - \sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i)$$

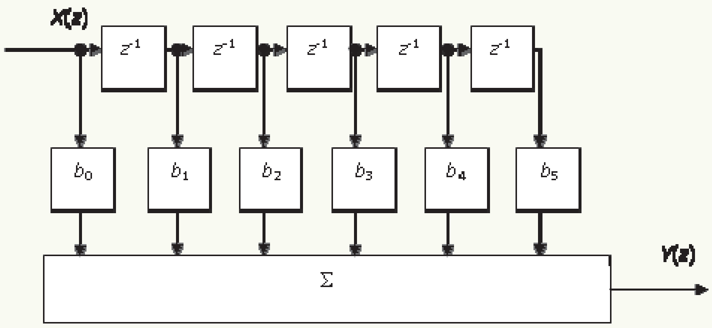
$$y(n) = \sum_{j=0}^{M} \frac{b_j}{a_0} x(n-j) - \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{a_0} x(n-i)$$

Représentation d'un système

On prend alors la transformée en *z* de cette équation :

$$Y(z) = \sum_{j=0}^{M} \frac{b_j}{a_0} x^{-j} X(z) - \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i}{a_0} z^{-i} Y(z)$$

Se rappelant que $z^{-2} = z^{-1} \cdot z^{-1}$, $z^{-3} = z^{-1} \cdot z^{-1} \cdot z^{-1}$ etc, on peut construire le schéma-bloc détaillé suivant :



Représentation d'un système

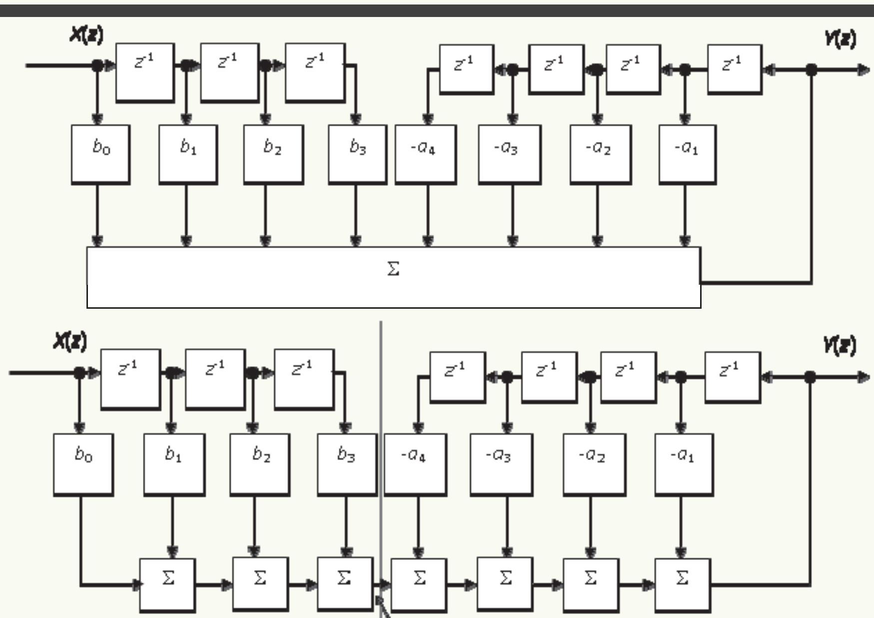
Equation aux différences : $a_0 y(n) = \sum_{j=0}^{M} b_j x(n-j)$

Fonction de transfert : $H(z) = \dfrac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{a_0}$

Réponse impulsionnelle : $h(n) = \sum_{j=0}^{M} \dfrac{b_j}{a_0} d(n-j)$

Dans ce cas, la réponse impulsionnelle $h(n) = Z^{-1}\{H(z)\}$ est très facile à calculer puisque le dénominateur de $H(z)$ n'est qu'une constante.
Si un ou plusieurs des coefficients a_1, a_2, a_3, … ne sont pas nuls, on a le cas général : on parle de *structure récursive*.

Représentation d'un système



Vu ainsi, le système est constitué de la mise en cascade de deux systèmes partiels ; le premier agit sur X(z) et fournit W(z) ; le second agit sur W(z) et fournit Y(z).

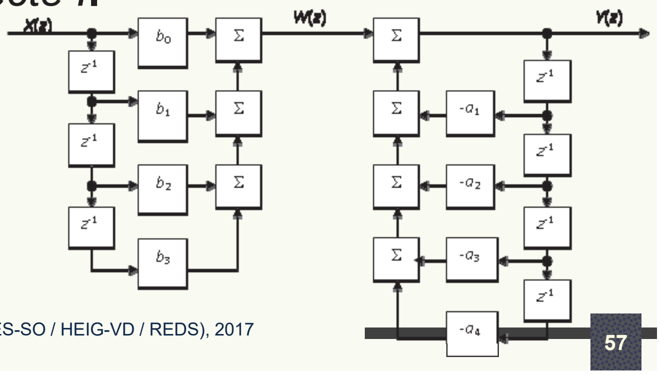
Représentation d'un système

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}}$$

Le système traite d'abord les zéros et ensuite les pôles.

Pour une raison de symétrie entre les deux parties du système, on inverse le sens de la sommation dans la première partie.

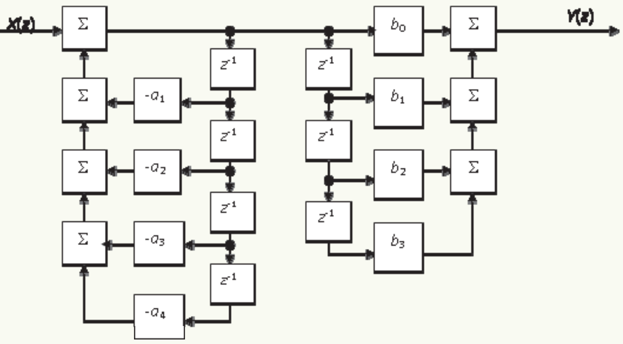
On obtient alors la structure appelée *forme directe I*.



Représentation d'un système

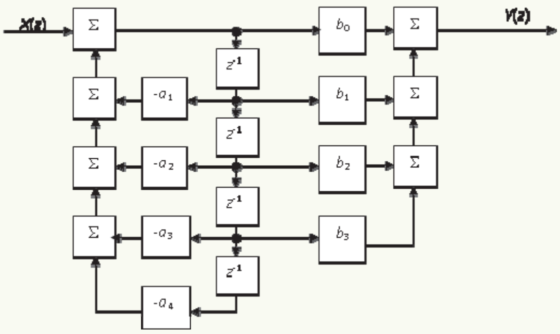
Il est possible d'intervertir l'ordre des deux parties du système. Le résultat à la sortie est le même mais le système traite d'abord les pôles et ensuite les zéros.

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{N} a_i z^{-i}} \cdot \frac{\sum_{j=0}^{M} b_j z^{-j}}{1}$$



On peut finalement n'utiliser qu'une série de retards et regrouper la partie de droite avec la partie de gauche.

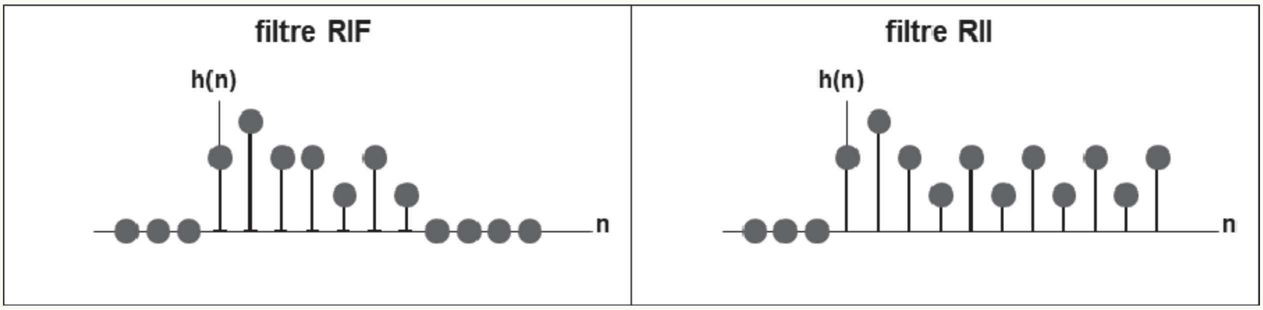
On obtient ainsi la *structure directe II* ou *forme directe canonique*.



Filtre numérique

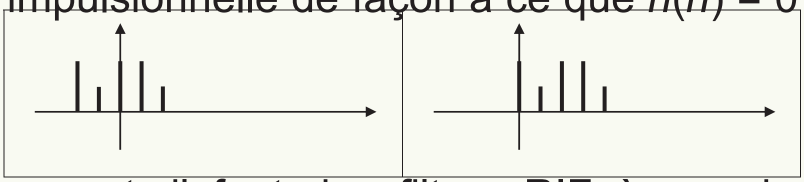
Un filtre dont la réponse impulsionnelle est de durée finie est appelée filtre à réponse impulsionnelle finie (filtre RIF ou FIR filter en anglais).

Lorsque ce n'est pas le cas, on parle de filtre à réponse impulsionnelle infinie (filtre RII ou IIR filter).



Filtre FIR

Un tel filtre est toujours stable pour autant que $h(n) \neq \infty$ pour tout n. Il peut avoir une phase qui varie linéairement avec la fréquence. On peut toujours rendre causals de tels filtres en retardant d'un nombre approprié d'instants d'échantillonnage la réponse impulsionnelle de façon à ce que $h(n) = 0$ pour tout $n < 0$.



Malheureusement, il faut des filtres RIF à grande durée pour obtenir des pentes raides dans le domaine fréquentiel ou pour avoir des facteurs de qualité élevé.

Les filtres RIF trouvent des applications dans les égaliseurs de phase (délais) des systèmes de communication, dans les processus de traitement de parole et d'images, …

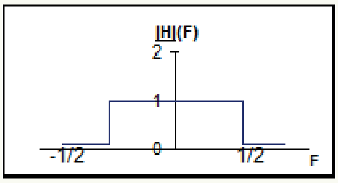
Exemple

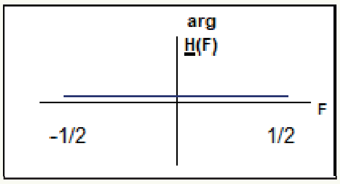
Synthétiser un filtre RIF qui approxime un passe-bas idéal de déphasage nul. Sa fréquence de coupure normalisée vaut $F_c = f_c/f_e$.

1. Se donner $\underline{H}(F)$:

   $\underline{H}(F) = 1$ pour $|F| < F_c$

   $\underline{H}(F) = 0$ pour $F_c < |F| < 1/2$ (sur une période)





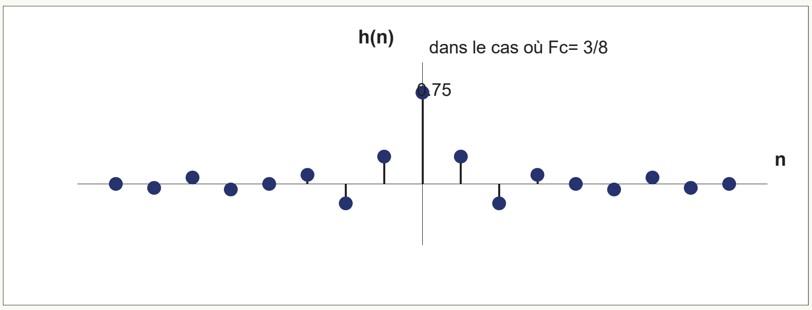
Exemple

Calculer $h(n)$:

$$h(n) = F^{-1}\{\underline{H}(F)\} = \int_{-1/2}^{1/2} \underline{H}(F) e^{jn2\pi F} dF$$

$$h(n) = \int_{-1/2}^{-F_c} 0\, dF + \int_{-F_c}^{F_c} 1\, e^{jn2\pi F} dF + \int_{F_c}^{1/2} 0\, dF$$

$$= \frac{1}{jn2\pi} e^{jn2\pi F} \Big|_{F_c}^{F_c} = \frac{\sin(2\pi n F_c)}{\pi n}$$

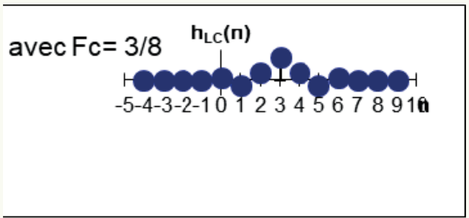


Exemple

•Limiter la durée de *h*(*n*)
Choisissons *L* = 7 ; on garde les échantillons de

$$n \in [-\,3 \text{ à } 3]$$

•Décaler $h_L(n)$
On décale ici du minimum possible, soit 3 échantillons
•On calcule la valeur des coefficients b_n.

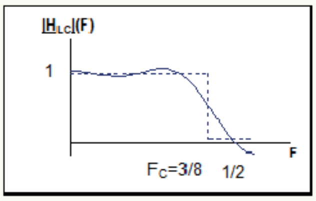


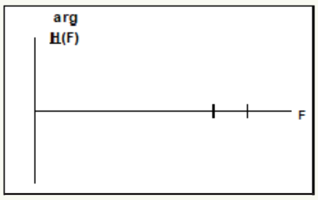
$b_0 = h_{LC}(0)$	0.075026
$b_1 = h_{LC}(1)$	-0.159154
$b_2 = h_{LC}(2)$	0.225079
$b_3 = h_{LC}(3)$	0.75
$b_4 = h_{LC}(4)$	0.225079
$b_5 = h_{LC}(5)$	-0.159154
$b_6 = h_{LC}(6)$	0.075026

$b_n = h_{Lc}(n) = h(n - 3)$
pour

$$n \in [0,6]$$

Exemple



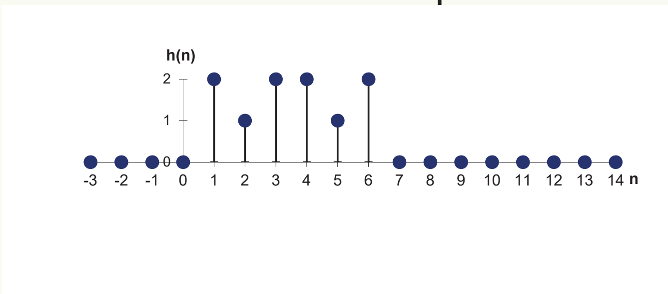


La fonction de transfert $\underline{H}_{Lc}(F)$ du filtre passe-bas approximé vaut :

$$\underline{H}_{Lc}(F) = 0.075\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0} - 0.159\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi F} + 0.225\mathrm{e}^{-\mathrm{j}4\pi F} + 0.75\mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\pi F}$$
$$+ 0.225\mathrm{e}^{-\mathrm{j}8\pi F} - 0.159\mathrm{e}^{-\mathrm{j}10\pi F} + 0.075\mathrm{e}^{-\mathrm{j}12\pi F}$$
$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{j}6\pi F}\left(0.15\cos(6\pi F) - 0.318\cos(4\pi F) + 0.45\cos(2\pi F) + 0.75\right)$$

Réalisation

Réaliser le filtre RIF à phase linéaire dont la réponse impulsionnelle est :



On a directement que :

$b_0 = h(n = 0) = 0$

$b_4 = h(n = 4) = 2$

$b_1 = h(n = 1) = 2$

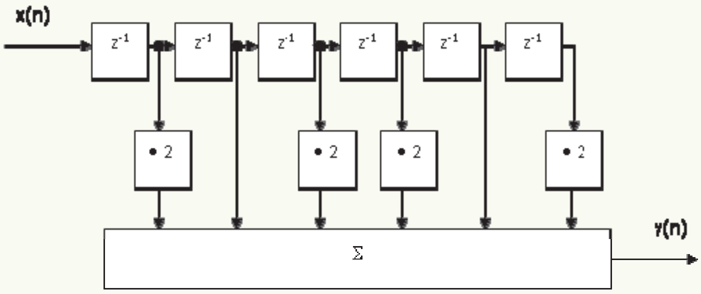
$b_5 = h(n = 5) = 1$

$b_6 = h(n = 6) = 2$

$b_2 = h(n = 2) = 1$

$b_3 = h(n = 3) = 2$

$a_1 = 1 \; a_{i \neq 0} = 0$



Filtre IIR

Un filtre dont la réponse impulsionnelle h(n) est de durée infinie est appelé un filtre à réponse impulsionnelle infinie (RII ou IIR en anglais).

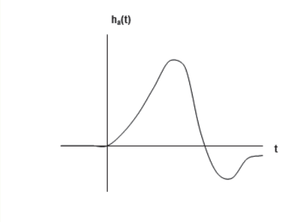
Un tel filtre a forcément une partie récursive (une « contre-réaction ») qui mémorise les états passés de la sortie.

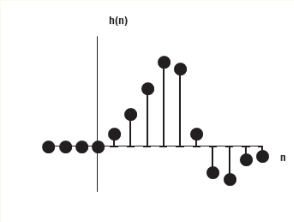
Voir ch2 page 50

Synthèse par …

La méthode de la réponse impulsionnelle invariante

Le principe de base de cette méthode est de copier en numérique la réponse impulsionnelle d'un filtre analogique





Les différentes étapes de calcul sont les suivantes :

Synthèse par …

- A partir de la courbe de réponse d'un filtre analogique $H_a(f)$ ou de sa fonction de transfert $H_a(s)$, calculer la réponse impulsionnelle $h_a(t)$ du filtre analogique :

$$h_a(t) = F^{-1}\{H_a(f)\} \text{ ou } h_a(t) = L^{-1}\{H_a(s)\}$$

- Copier la réponse impulsionnelle analogique $h_a(t)$ en la même, mais numérique : $h(n) = h_a(t = n \cdot \Delta t)$

- Calculer la fonction de transfert H(z) du filtre numérique :

$$H(z) = Z\{h(n)\}$$

On peut alors en déduire la réponse fréquentielle H(f), l'équation aux différences, les coefficients a_i et b_j et donc le schéma-bloc du filtre.

$H_a(f)$ ou $H_a(s)$ →1→ $h_a(t)$ →2→ h(n) →3→H(z) ou H(f)

Synthèse par …

La méthode de la transformation bilinéaire.
Au lieu de copier en numérique une réponse impulsionnelle analogique, on va essayer de copier directement la fonction de transfert Ha(s) du filtre analogique.
Pour cela, on cherchera une application du plan des s vers le plan des z, transformant ainsi directement Ha(s) en H(z). Dans une telle application, il est souhaitable que l'axe imaginaire du plan des s soit appliqué sur le cercle unité et que le demi-plan gauche du plan des s soit appliqué à l'intérieur du cercle unité dans le plan des z. Ceci garantit qu'un filtre analogique stable se transforme en un filtre numérique stable. L'application la plus couramment utilisée est une fonction bilinéaire basée sur l'équivalence de l'intégration.

Exemple

Calculer un filtre numérique passe-bas du 1er ordre ayant une fréquence de coupure à –3dB de 10 kHz ; la fréquence d'échantillonnage est de f_e = 44.1 kHz.
•Prédéformer le gabarit ($\Delta t = 1/ f_e$).

$$f_c = 10kHz \Rightarrow f_{ac} = \frac{1}{\pi\Delta t}\left(\Delta t \pi f_c\right) = 12123.8Hz$$

•Trouver $H_a(s)$.
Pour un passe-bas 1er ordre :

$$H_a(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{\omega_{ac}}} \quad \text{avec}\, \omega_{ac} = 2\pi f_{ac} \qquad H_a(s) = \frac{1}{1+13.127\cdot 10^{-6}\, s}$$

Exemple

Trouver H(z) en utilisant la transformation bilinéaire

$$H(z) = \frac{1}{1 + 13.127 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 44100 \cdot \dfrac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = \frac{1 + z^{-1}}{2.1578 - 0.1578 z^{-1}}$$

Pour avoir a_0= 1, on divise numérateur et dénominateur par 2.1578

$$H(z) = \frac{0.4634 + 0.4634 z^{-1}}{1 - 0.07313 z^{-1}}$$

Exemple

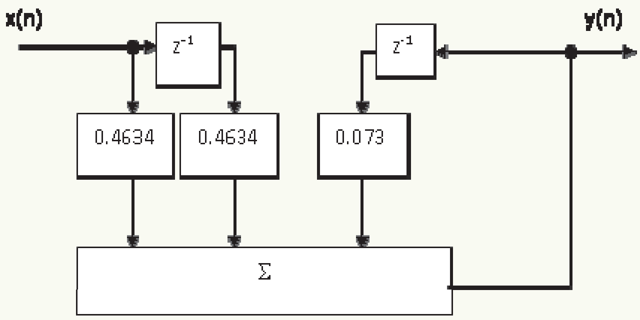
Réalisation du filtre

a_0 = 1

a_1 = -0.07313

b_0 = 0.4634

b_1 = 0.4634

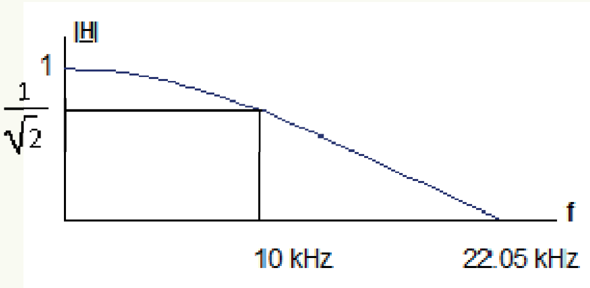


Exemple

Réponse en fréquence.
On remplace z par $e^{j\omega \Delta t} = e^{j2\pi f \Delta t}$

$$\underline{H}(f) = \frac{0.4634 + 0.4634 e^{-j2\pi f \Delta t}}{1 - 0.07313 e^{-j2\pi f \Delta t}}$$

Calcul de quelques valeurs
$\underline{H}(0) = 1$
$\underline{H}(1kHz) = 0.996$
$\underline{H}(5kHz) = 0.918$
$\underline{H}(10kHz) = 0.707$
$\underline{H}(20kHz) = 0.126$



Conclusion sur les filtres

RIF
Toujours stable.
Phase linéaire.
Facile à concevoir.
La durée des transitoires = longueur du filtre.

RII
Peuvent être instables.
Phase non linéaire.
Nécessitent moins d 'opérations et de places mémoires.
Plus efficaces que RIF

Filtre numérique

13.3 Fonction de transfert d'un fitre numérique

Fonction de transfert générale d'un filtre numérique IIR (le FIR n'a pas le dénominateur)

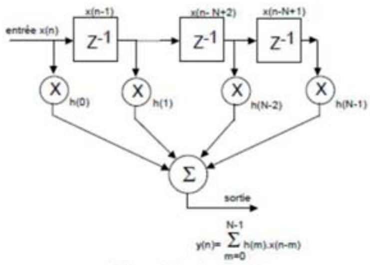
L'expression de la fonction de transfert harmonique d'un filtre numérique est la suivante :

$$H(j\omega) = \frac{R}{A} = \frac{r_n}{a_n} = \frac{\sum_{k=0}^{K} A_k\, e^{-jk\omega\theta}}{(1 - \sum_{m=1}^{M} B_m e^{-jm\omega\theta})} \quad (216)$$

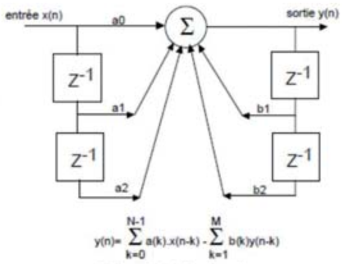
La fonction de transfert en z s'exprime :

$$H(z) = \frac{R(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{K} \frac{A_k}{z^k}}{1 - \sum_{m=1}^{M} \frac{B_m}{z^m}} \quad (217)$$

Représentation des filtres numériques



Filtre FIR d'ordre N



Filtre IIR d'ordre 2

(218)

Théorème du retard

C'est une simple propriété essentiellement due à la forme particulière des fonctions propres d'une base de Fourier

$x(t-t_0)$ à pour transformée $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi ft}dt$

en posant t'=t-t_0 il vient : $\int x(t').e^{-j2\pi ft}.e^{-j2\pi ft_0}dt = X(j2\pi f).e^{-j2\pi ft_0}$

Le retard se traduit par un déphasage de la transformée

DCT

Voir cours ch 2 page 2-25

RIF
RII

DWT

Voir cours ch 2 page 2-25

RIF
RII

Modulation

Voir cours ch 2 page 2-25

RIF
RII